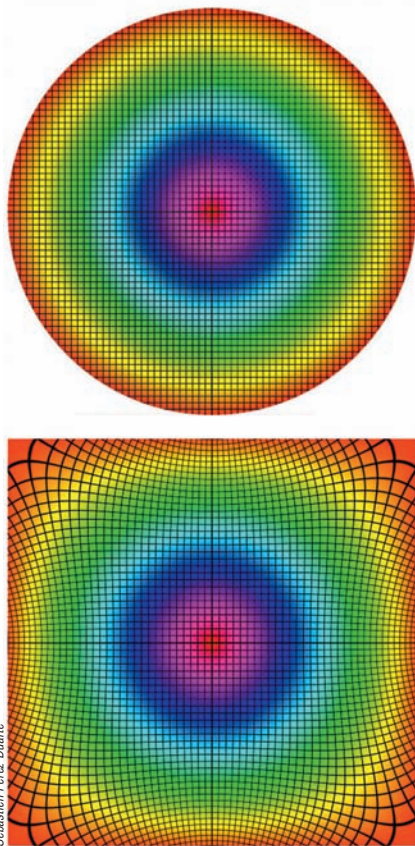


2. QUATRE PAVAGES POSSIBLES d'une pièce où la couleur des carreaux est tirée au hasard équitablement, à pile ou face. On voit que l'existence d'un chemin d'hexagones bleus (ou jaunes) reliant le côté gauche et le côté droit – un chemin de percolation – empêche l'existence d'un che-

min d'hexagones jaunes (ou bleus) reliant les côtés haut et bas. Le calcul de la probabilité d'avoir un chemin percolant dans un réseau de taille infinie est l'une des questions auxquelles cherchent à répondre les théoriciens de la percolation.



Sébastien Pérez-Duarte

3. UNE APPLICATION CONFORME est une transformation du plan qui laisse inchangés en chaque point les angles. Les exemples les plus simples sont les translations, les rotations et les homothéties. Mais il existe une infinité de transformations conformes dans le plan [toute fonction injective et analytique d'une variable complexe permet de définir une application conforme]. L'une d'elles est illustrée ici, elle transforme un disque en un carré. Les lignes noires permettent de remarquer que les croisements à angle droit se conservent d'une figure à l'autre. En dimension supérieure à 2, l'ensemble des transformations conformes est beaucoup moins riche.

polytechnique, a étudié les phénomènes de corrosion et a relevé des similarités frappantes avec les propriétés de la percolation (voir la figure 4). Plus récemment, en 2008, la théorie de la percolation a permis à une équipe anglo-néerlandaise de comprendre les épidémies de peste qui frappent les grandes gerbilles au Kazakhstan.

Dans cet article, nous nous limiterons au simple modèle de percolation géométrique que constitue le pavage d'une pièce par des hexagones. Nous verrons que les réponses aux questions de Maxime, et à d'autres du même type, sont surprenantes et font de la percolation un modèle fécond.

Aller d'un côté à l'autre

Revenons à la première question de Maxime. Une fois le carrelage achevé, sera-t-il possible de traverser d'un mur à l'autre en marchant uniquement sur des hexagones bleus adjacents ? Comme Maxime s'est posé la question avant d'avoir carrelé sa cuisine, il ne peut pas affirmer si la pièce sera traversable ou non : le choix de la couleur des carreaux étant aléatoire, il n'a pas l'information nécessaire.

Il est impossible de savoir *a priori* si la pièce sera traversable ou non, mais on peut estimer la probabilité que cela arrive. Un joueur de loto ignore s'il va gagner ou non, mais il peut calculer la probabilité de toucher le gros lot : en tenant compte du fait que tous les numéros ont la même chance d'être le numéro gagnant, la probabilité que le joueur gagne vaut $1/N$, où N est le nombre de numéros possibles (pour le loto français, N est égal à 19 millions environ). Dans notre cas, nous pouvons nous demander également quelle chance a Maxime de pouvoir traverser sa pièce. Le calcul sera bien plus complexe que pour le loto.

Imaginons que la cuisine de Maxime soit carrée. Dans ce cas particulier, le calcul de la probabilité qu'il y ait un chemin allant d'un mur à l'autre est assez simple. On peut remarquer que nous sommes face à une alternative : soit il existe un chemin d'hexagones bleus allant de gauche à droite, soit il existe un chemin d'hexagones jaunes allant de haut en bas qui empêche l'existence d'un chemin d'hexagones bleus allant de gauche à droite (voir la figure 2). De plus, la probabilité d'avoir un chemin jaune traversant de haut en bas est la même que celle d'avoir un chemin bleu traversant de gauche à droite, puisque la pièce est un carré et que le problème reste le même si l'on échange le jaune et le bleu (le choix de la couleur étant fait avec les deux probabilités égales à $1/2$). Ainsi, nous pourrions traverser dans la moitié des cas, ce qui signifie que la probabilité de traverser vaut $1/2$. En conclusion, la question de Maxime admet une réponse élémentaire pour une cuisine carrée et deux couleurs équiprobables.

Dans la suite, sauf mention contraire, on supposera toujours que les deux couleurs ont la même probabilité, ce qui correspond à la percolation dite critique, la situation la plus intéressante et pour laquelle il existe des méthodes d'analyse théorique puissantes (voir l'encadré page 51).

Nous venons de considérer le cas d'une pièce carrée. Qu'advient-il lorsque la pièce n'est plus carrée, mais rectangulaire ? Cette question a été posée pour la première fois en 1894, sous une forme un peu différente, par le mécanicien et mathématicien américain De Volson Wood dans le mensuel *The American Mathematical Monthly*. L'éditeur avait alors commenté : « C'est un très bon problème, et si quelqu'un nous en fournit une solution complète, nous la publierons dans