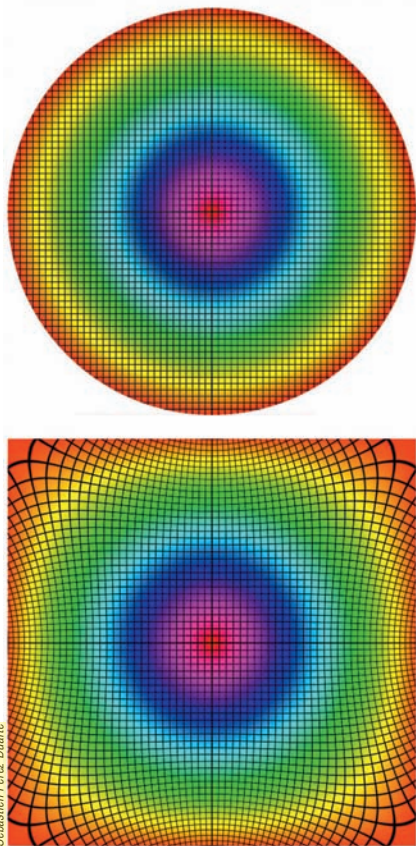


**2. QUATRE PAVAGES POSSIBLES** d'une pièce où la couleur des carreaux est tirée au hasard équitablement, à pile ou face. On voit que l'existence d'un chemin d'hexagones bleus (ou jaunes) reliant le côté gauche et le côté droit – un chemin de percolation – empêche l'existence d'un che-

min d'hexagones jaunes (ou bleus) reliant les côtés haut et bas. Le calcul de la probabilité d'avoir un chemin percolant dans un réseau de taille infinie est l'une des questions auxquelles cherchent à répondre les théoriciens de la percolation.



**3. UNE APPLICATION CONFORME** est une transformation du plan qui laisse inchangés en chaque point les angles. Les exemples les plus simples sont les translations, les rotations et les homothéties. Mais il existe une infinité de transformations conformes dans le plan [toute fonction injective et analytique d'une variable complexe permet de définir une application conforme]. L'une d'elles est illustrée ici, elle transforme un disque en un carré. Les lignes noires permettent de remarquer que les croisements à angle droit se conservent d'une figure à l'autre. En dimension supérieure à 2, l'ensemble des transformations conformes est beaucoup moins riche.

polytechnique, a étudié les phénomènes de corrosion et a relevé des similarités frappantes avec les propriétés de la percolation (voir la figure 4). Plus récemment, en 2008, la théorie de la percolation a permis à une équipe anglo-néerlandaise de comprendre les épidémies de peste qui frappent les grandes gerbilles au Kazakhstan.

Dans cet article, nous nous limiterons au simple modèle de percolation géométrique que constitue le pavage d'une pièce par des hexagones. Nous verrons que les réponses aux questions de Maxime, et à d'autres du même type, sont surprenantes et font de la percolation un modèle fécond.

## Aller d'un côté à l'autre

Revenons à la première question de Maxime. Une fois le carrelage achevé, sera-t-il possible de traverser d'un mur à l'autre en marchant uniquement sur des hexagones bleus adjacents ? Comme Maxime s'est posé la question avant d'avoir carrelé sa cuisine, il ne peut pas affirmer si la pièce sera traversable ou non : le choix de la couleur des carreaux étant aléatoire, il n'a pas l'information nécessaire.

Il est impossible de savoir *a priori* si la pièce sera traversable ou non, mais on peut estimer la probabilité que cela arrive. Un joueur de loto ignore s'il va gagner ou non, mais il peut calculer la probabilité de toucher le gros lot : en tenant compte du fait que tous les numéros ont la même chance d'être le numéro gagnant, la probabilité que le joueur gagne vaut  $1/N$ , où  $N$  est le nombre de numéros possibles (pour le loto français,  $N$  est égal à 19 millions environ). Dans notre cas, nous pouvons nous demander également quelle chance a Maxime de pouvoir traverser sa pièce. Le calcul sera bien plus complexe que pour le loto.

Imaginons que la cuisine de Maxime soit carrée. Dans ce cas particulier, le calcul de la probabilité qu'il y ait un chemin allant d'un mur à l'autre est assez simple. On peut remarquer que nous sommes face à une alternative : soit il existe un chemin d'hexagones bleus allant de gauche à droite, soit il existe un chemin d'hexagones jaunes allant de haut en bas qui empêche l'existence d'un chemin d'hexagones bleus allant de gauche à droite (voir la figure 2). De plus, la probabilité d'avoir un chemin jaune traversant de haut en bas est la même que celle d'avoir un chemin bleu traversant de gauche à droite, puisque la pièce est un carré et que le problème reste le même si l'on échange le jaune et le bleu (le choix de la couleur étant fait avec les deux probabilités égales à  $1/2$ ). Ainsi, nous pourrions traverser dans la moitié des cas, ce qui signifie que la probabilité de traverser vaut  $1/2$ . En conclusion, la question de Maxime admet une réponse élémentaire pour une cuisine carrée et deux couleurs équiprobables.

Dans la suite, sauf mention contraire, on supposera toujours que les deux couleurs ont la même probabilité, ce qui correspond à la percolation dite critique, la situation la plus intéressante et pour laquelle il existe des méthodes d'analyse théorique puissantes (voir l'encadré page 51).

Nous venons de considérer le cas d'une pièce carrée. Qu'advient-il lorsque la pièce n'est plus carrée, mais rectangulaire ? Cette question a été posée pour la première fois en 1894, sous une forme un peu différente, par le mécanicien et mathématicien américain De Volson Wood dans le mensuel *The American Mathematical Monthly*. L'éditeur avait alors commenté : « C'est un très bon problème, et si quelqu'un nous en fournit une solution complète, nous la publierons dans

le prochain numéro. » Il était trop optimiste, car la question est restée ouverte pendant plus d'un siècle...

On peut d'abord noter que l'argument utilisé pour une pièce carrée ne fonctionne plus dans le cas d'un rectangle, puisque la probabilité d'un chemin bleu de gauche à droite n'est plus la même que la probabilité d'un chemin jaune de haut en bas. À vrai dire, il est impossible de calculer exactement la chance de pouvoir traverser. Cependant, on peut s'intéresser à une question très proche.

## Quand la taille des carreaux tend vers zéro

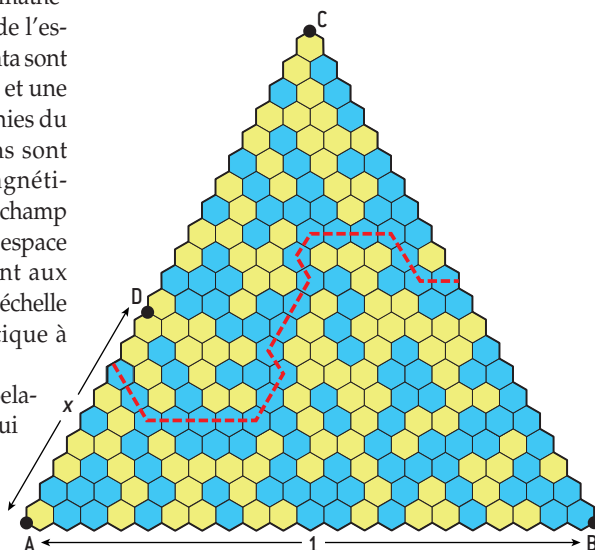
Jusqu'ici, nous n'avons pas précisé la taille de la pièce ou, de façon équivalente, la taille des hexagones. Si Maxime pave sa cuisine carrée de trois mètres sur trois par des hexagones ayant dix centimètres de côté, ou trois centimètres, le raisonnement précédent fait pour la pièce carrée s'applique encore et la probabilité de pouvoir traverser la pièce reste égale à  $1/2$ . Mais si la cuisine fait trois mètres sur quatre, le résultat dépendra *a priori* de la taille des hexagones.

Poussons le raisonnement plus loin et imaginons un pavage par des hexagones de un micromètre, de un nanomètre, etc. En considérant ainsi des carrelages faits d'hexagones de plus en plus petits, la probabilité de traverser se rapproche de plus en plus d'une valeur qualifiée de probabilité limite. La percolation étant un modèle pertinent seulement pour des systèmes contenant un très grand nombre d'hexagones, l'approximation consistant à supposer que la taille des hexagones tend vers zéro est naturelle. Quelle est la valeur de la probabilité limite pour une pièce rectangulaire ?

La réponse à cette question est venue en plusieurs temps. Tout d'abord, appelons « limite d'échelle » de la percolation le modèle obtenu en faisant tendre vers zéro la taille des hexagones. De nombreux autres modèles de la physique statistique (discipline qui étudie les systèmes composés d'un très grand nombre de particules) admettent une limite d'échelle. Or on montre que la limite d'échelle des modèles bidimensionnels de physique statistique est équivalente, du point de vue mathématique, à une théorie quantique de champs en deux dimensions d'espace où les quanta du champ sont des particules de masse nulle.

Expliquons succinctement ce que cela veut dire. En théorie quantique, les particules telles que les électrons et les photons sont des quanta d'un « champ » approprié. Un champ est une entité mathématique définie en chaque point de l'espace et à chaque instant, et les quanta sont des unités véhiculant une énergie et une quantité de mouvement bien définies du champ. Par exemple, les photons sont les quanta du champ électromagnétique ; ils sont de masse nulle, mais le champ électromagnétique évolue dans un espace à trois dimensions, contrairement aux champs correspondant à la limite d'échelle des modèles de physique statistique à deux dimensions.

En 1984, les physiciens russes Belavin, Polyakov et Zamolodchikov, qui ont tous trois Alexander pour prénom, ont présenté des arguments montrant que ces champs bidimensionnels, limites de modèles bidimensionnels de physique statistique lorsque la taille de chaque élément tend vers zéro, ont un immense groupe de symétries : le groupe des « transformations conformes ». Il s'agit des transformations du plan qui conservent en chaque point



**4. UN CHEMIN PERCOLANT** qui relie, par des hexagones bleus, le bord DA au côté BC d'un réseau en forme de triangle équilatéral. Si les côtés de ce triangle sont de longueur unité, et si la longueur du bord DA est égale à  $x$ , la probabilité limite [obtenue quand la taille des hexagones tend vers zéro] qu'il y ait un tel chemin est égale à  $x$ .

## Transitions de phase et percolation

De nombreux systèmes physiques présentent une transition de phase, c'est-à-dire un changement brutal lorsque l'un des paramètres atteint une certaine valeur. Un exemple en est le changement d'état de l'eau liquide en glace lorsque la température atteint  $0^\circ\text{C}$ . Le modèle de percolation présente aussi une transition de phase : un chemin bleu infini traversant d'un côté à l'autre apparaît à partir d'une certaine valeur  $p_c$  (égale à  $1/2$ ) de la probabilité du bleu.

Le comportement d'un système lors d'une transition de phase est décrit par des propriétés macroscopiques du système, des grandeurs dites thermodynamiques. Pour la percolation, on peut par exemple étudier la densité  $D(p)$  de l'amas d'hexagones bleus et contigus qui s'étend d'un bout à l'autre du réseau, c'est-à-dire

la proportion moyenne d'hexagones appartenant à cet ensemble. Cette densité vaut 0 pour  $p < 1/2$  et est strictement positive pour  $p > 1/2$ . Étudier la transition de phase, c'est par exemple examiner comment  $D(p)$  se comporte lorsque  $p$  se rapproche de  $1/2$  par valeurs supérieures. En dimension 2 et grâce au résultat d'invariance conforme, on prouve que  $D(p)$  décroît vers 0 comme  $(p - 1/2)^{5/36}$ .

Les travaux de Stanislas Smirnov permettent de comprendre le comportement d'autres grandeurs thermodynamiques du modèle, telle la longueur de corrélation. Cette dernière est une mesure de la distance jusqu'à laquelle deux points du système ont une influence l'un sur l'autre. Au point critique d'un système, la longueur de corrélation tend vers

l'infini selon une loi qu'il est parfois possible de déterminer.

Un autre modèle célèbre de la physique statistique qui présente une transition de phase est le « modèle d'Ising » à deux dimensions. Il consiste à placer aux nœuds d'un réseau plan des atomes ayant un spin (ou moment magnétique) égal à  $+1$  ou  $-1$ , chaque spin interagissant avec ses voisins immédiats de façon à ce que les spins tendent à prendre le même signe (une tendance contrecarrée par l'agitation thermique). Ce modèle simule le comportement des matériaux ferromagnétiques. Dans ce cas, les propriétés thermodynamiques intéressantes incluent l'aimantation. S. Smirnov a également étudié ce modèle et prouvé son invariance conforme lorsque le pas du réseau tend vers zéro.