

le prochain numéro. » Il était trop optimiste, car la question est restée ouverte pendant plus d'un siècle...

On peut d'abord noter que l'argument utilisé pour une pièce carrée ne fonctionne plus dans le cas d'un rectangle, puisque la probabilité d'un chemin bleu de gauche à droite n'est plus la même que la probabilité d'un chemin jaune de haut en bas. À vrai dire, il est impossible de calculer exactement la chance de pouvoir traverser. Cependant, on peut s'intéresser à une question très proche.

Quand la taille des carreaux tend vers zéro

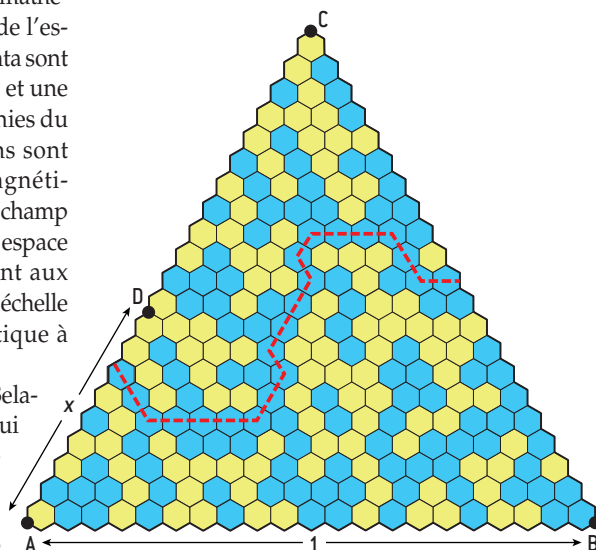
Jusqu'ici, nous n'avons pas précisé la taille de la pièce ou, de façon équivalente, la taille des hexagones. Si Maxime pave sa cuisine carrée de trois mètres sur trois par des hexagones ayant dix centimètres de côté, ou trois centimètres, le raisonnement précédent fait pour la pièce carrée s'applique encore et la probabilité de pouvoir traverser la pièce reste égale à $1/2$. Mais si la cuisine fait trois mètres sur quatre, le résultat dépendra *a priori* de la taille des hexagones.

Poussons le raisonnement plus loin et imaginons un pavage par des hexagones de un micromètre, de un nanomètre, etc. En considérant ainsi des carrelages faits d'hexagones de plus en plus petits, la probabilité de traverser se rapproche de plus en plus d'une valeur qualifiée de probabilité limite. La percolation étant un modèle pertinent seulement pour des systèmes contenant un très grand nombre d'hexagones, l'approximation consistant à supposer que la taille des hexagones tend vers zéro est naturelle. Quelle est la valeur de la probabilité limite pour une pièce rectangulaire ?

La réponse à cette question est venue en plusieurs temps. Tout d'abord, appelons « limite d'échelle » de la percolation le modèle obtenu en faisant tendre vers zéro la taille des hexagones. De nombreux autres modèles de la physique statistique (discipline qui étudie les systèmes composés d'un très grand nombre de particules) admettent une limite d'échelle. Or on montre que la limite d'échelle des modèles bidimensionnels de physique statistique est équivalente, du point de vue mathématique, à une théorie quantique de champs en deux dimensions d'espace où les quanta du champ sont des particules de masse nulle.

Expliquons succinctement ce que cela veut dire. En théorie quantique, les particules telles que les électrons et les photons sont des quanta d'un « champ » approprié. Un champ est une entité mathématique définie en chaque point de l'espace et à chaque instant, et les quanta sont des unités véhiculant une énergie et une quantité de mouvement bien définies du champ. Par exemple, les photons sont les quanta du champ électromagnétique ; ils sont de masse nulle, mais le champ électromagnétique évolue dans un espace à trois dimensions, contrairement aux champs correspondant à la limite d'échelle des modèles de physique statistique à deux dimensions.

En 1984, les physiciens russes Belavin, Polyakov et Zamolodchikov, qui ont tous trois Alexander pour prénom, ont présenté des arguments montrant que ces champs bidimensionnels, limites de modèles bidimensionnels de physique statistique lorsque la taille de chaque élément tend vers zéro, ont un immense groupe de symétries : le groupe des « transformations conformes ». Il s'agit des transformations du plan qui conservent en chaque point



4. UN CHEMIN PERCOLANT qui relie, par des hexagones bleus, le bord DA au côté BC d'un réseau en forme de triangle équilatéral. Si les côtés de ce triangle sont de longueur unité, et si la longueur du bord DA est égale à x , la probabilité limite [obtenue quand la taille des hexagones tend vers zéro] qu'il y ait un tel chemin est égale à x .

Transitions de phase et percolation

De nombreux systèmes physiques présentent une transition de phase, c'est-à-dire un changement brutal lorsque l'un des paramètres atteint une certaine valeur. Un exemple en est le changement d'état de l'eau liquide en glace lorsque la température atteint 0°C . Le modèle de percolation présente aussi une transition de phase : un chemin bleu infini traversant d'un côté à l'autre apparaît à partir d'une certaine valeur p_c (égale à $1/2$) de la probabilité du bleu.

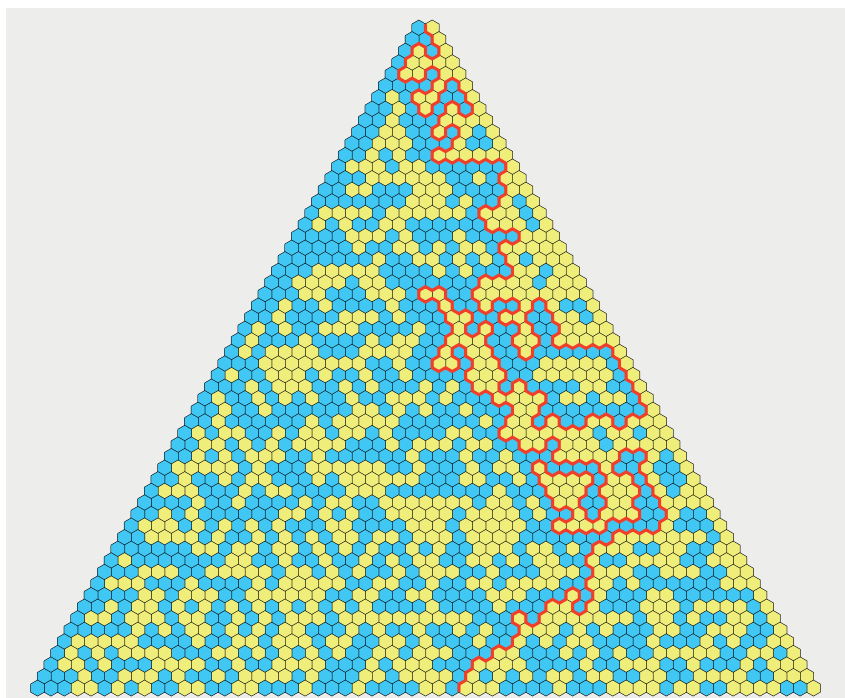
Le comportement d'un système lors d'une transition de phase est décrit par des propriétés macroscopiques du système, des grandeurs dites thermodynamiques. Pour la percolation, on peut par exemple étudier la densité $D(p)$ de l'amas d'hexagones bleus et contigus qui s'étend d'un bout à l'autre du réseau, c'est-à-dire

la proportion moyenne d'hexagones appartenant à cet ensemble. Cette densité vaut 0 pour $p < 1/2$ et est strictement positive pour $p > 1/2$. Étudier la transition de phase, c'est par exemple examiner comment $D(p)$ se comporte lorsque p se rapproche de $1/2$ par valeurs supérieures. En dimension 2 et grâce au résultat d'invariance conforme, on prouve que $D(p)$ décroît vers 0 comme $(p - 1/2)^{5/36}$.

Les travaux de Stanislas Smirnov permettent de comprendre le comportement d'autres grandeurs thermodynamiques du modèle, telle la longueur de corrélation. Cette dernière est une mesure de la distance jusqu'à laquelle deux points du système ont une influence l'un sur l'autre. Au point critique d'un système, la longueur de corrélation tend vers

l'infini selon une loi qu'il est parfois possible de déterminer.

Un autre modèle célèbre de la physique statistique qui présente une transition de phase est le « modèle d'Ising » à deux dimensions. Il consiste à placer aux nœuds d'un réseau plan des atomes ayant un spin (ou moment magnétique) égal à $+1$ ou -1 , chaque spin interagissant avec ses voisins immédiats de façon à ce que les spins tendent à prendre le même signe (une tendance contrecarrée par l'agitation thermique). Ce modèle simule le comportement des matériaux ferromagnétiques. Dans ce cas, les propriétés thermodynamiques intéressantes incluent l'aimantation. S. Smirnov a également étudié ce modèle et prouvé son invariance conforme lorsque le pas du réseau tend vers zéro.



5. UN EXEMPLE DE PROCESSUS D'EXPLORATION, où l'on borde les hexagones jaunes par la gauche (en rouge). Dans la limite où la taille des hexagones tend vers zéro, ce chemin devient une courbe aléatoire du type SLE (*Schramm-Loewner Evolution*).

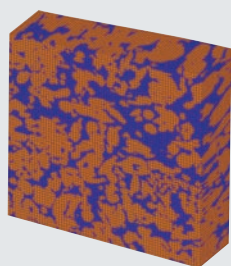
Autres graphes et autres dimensions

La percolation a été décrite dans l'article sur un réseau d'hexagones, mais le terme de percolation se réfère à une famille beaucoup plus large de modèles.

Imaginons un graphe, c'est-à-dire un ensemble de points, appelés sommets, et de lignes, appelées arêtes, reliant certains de ces sommets. Un pavage d'hexagones forme un graphe : les sommets sont les points d'intersection de trois hexagones et les arêtes sont simplement les bordures entre les hexagones. Une percolation par arête sur un graphe est le processus obtenu quand on efface chaque arête avec une certaine probabilité p , toutes choses égales par ailleurs. On obtient alors de nouveau un graphe possédant les mêmes sommets, mais seulement un sous-ensemble de ses arêtes.

On peut aussi considérer la percolation sur une grille (un réseau de carrés). Bien que ce

modèle soit un peu différent du modèle hexagonal décrit dans le corps du texte, il partage avec lui de nombreuses particularités. Par exemple, il présente également une transition de phase ayant les mêmes propriétés que celle de la percolation sur les hexagones.



Cette ressemblance entre des modèles *a priori* différents est nommée universalité : les propriétés macroscopiques de ces systèmes ne dépendent pas de la géométrie locale (hexagonale/carrée), mais seulement de propriétés générales (ici, l'indépendance entre les différentes faces/arêtes).

Par ailleurs, la percolation ne se restreint pas à la dimension 2. On peut par exemple étudier la percolation sur un réseau cubique (voir la figure). Elle est beaucoup plus mystérieuse que la percolation sur le réseau plan hexagonal. Le fait d'être en dimension trois complique beaucoup la tâche et certaines questions très élémentaires figurent parmi les conjectures les plus importantes en théorie des probabilités. Remarquons que la dimension trois est celle de l'espace où nous vivons, et il est donc d'autant plus fondamental de la comprendre.

Paradoxalement, la percolation sur des graphes en dimension très supérieure à trois est bien mieux comprise, car ces graphes ressemblent alors à s'y méprendre à des arbres, c'est-à-dire des graphes sans boucles. La percolation sur les arbres est beaucoup plus facile à analyser et a des interprétations en termes de phylogénie.

les angles, mais pas nécessairement les distances. Les exemples les plus simples sont les translations, les rotations et les homothéties, mais il en existe une infinité d'autres (voir la figure 3). En fait, on montre que toute fonction analytique f d'une variable complexe z représente une transformation conforme dans le plan (« analytique » signifie qu'au voisinage de tout point z_0 , $f(z)$ peut s'exprimer sous la forme d'une somme, éventuellement infinie, de puissances entières de $(z - z_0)$). La remarquable prédiction BPZ, du nom de ses trois auteurs, fit naître un domaine entier de la physique : la théorie conforme des champs, dont les ramifications vont jusqu'à la théorie des cordes.

Du carré au rectangle

Dans le cas de la percolation et de ses probabilités de traverser d'un côté à l'autre, la prédiction BPZ implique que la probabilité limite est identique dans deux pièces différentes à condition que l'on puisse transformer l'une de ces pièces en l'autre par une transformation conforme. C'est ce qui permit au physicien britannique John Cardy de prédire, au début des années 1990, la valeur de la probabilité limite.

La formule qui donne, pour un rectangle, la probabilité limite d'être traversable est une expression compliquée, où interviennent des fonctions dites hypergéométriques. Toutefois, le mathématicien suédois Lennart Carleson (prix Abel en 2006 pour l'ensemble de son œuvre) remarqua qu'elle revêt une forme particulièrement élégante lorsque la pièce a une forme de triangle équilatéral (voir la figure 4).

Plus précisément, notons A, B et C les coins de cette pièce. Comme nous avons jusqu'ici considéré des pièces à quatre murs, ne nous arrêtons pas en si bon chemin et plaçons le quatrième coin D de la pièce sur le segment CA (de longueur un), à distance x de A. On a donc une pièce à quatre murs, AB, BC, CD et DA. La formule de Cardy est alors très simple : la probabilité limite que l'on puisse traverser depuis le mur DA jusqu'au mur opposé BC est égale à x . Ce résultat n'est pas surprenant lorsque $x = 1/2$, le raisonnement fait dans le cas du carré pouvant être adapté à ce cas particulier. En revanche, pour des valeurs différentes de x , il est stupéfiant.

J. Cardy s'était appuyé sur de nombreux résultats de théorie conforme des champs qui ne sont pas prouvés. Restait