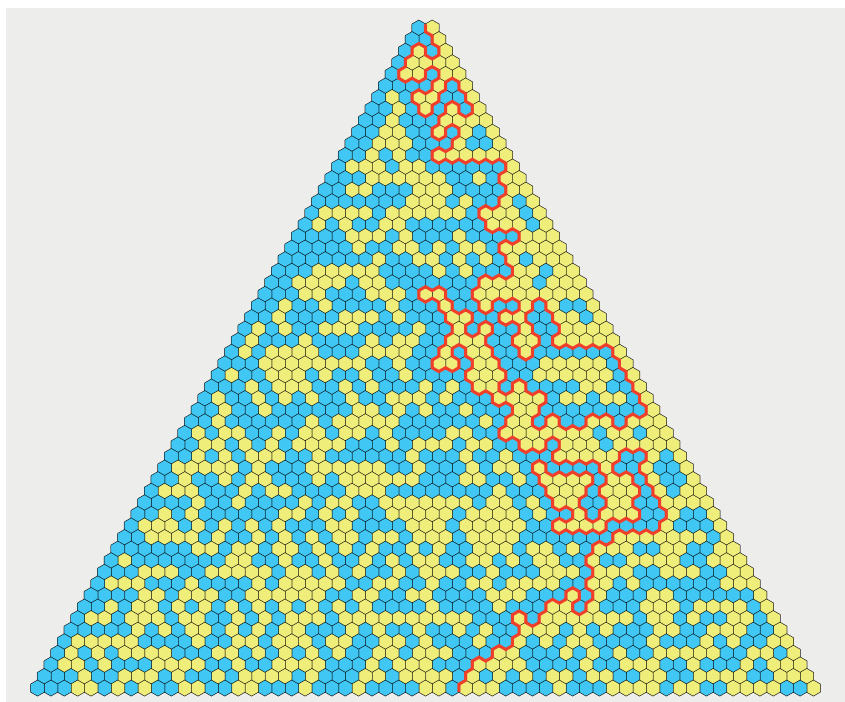




5. UN EXEMPLE DE PROCESSUS D'EXPLORATION, où l'on borde les hexagones jaunes par la gauche (*en rouge*). Dans la limite où la taille des hexagones tend vers zéro, ce chemin devient une courbe aléatoire du type SLE (*Schramm-Loewner Evolution*).

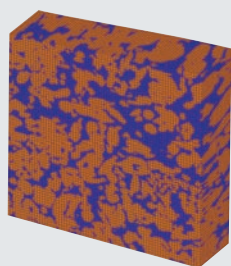
Autres graphes et autres dimensions

La percolation a été décrite dans l'article sur un réseau d'hexagones, mais le terme de percolation se réfère à une famille beaucoup plus large de modèles.

Imaginons un graphe, c'est-à-dire un ensemble de points, appelés sommets, et de lignes, appelées arêtes, reliant certains de ces sommets. Un pavage d'hexagones forme un graphe : les sommets sont les points d'intersection de trois hexagones et les arêtes sont simplement les bordures entre les hexagones. Une percolation par arête sur un graphe est le processus obtenu quand on efface chaque arête avec une certaine probabilité p , toutes choses égales par ailleurs. On obtient alors de nouveau un graphe possédant les mêmes sommets, mais seulement un sous-ensemble de ses arêtes.

On peut aussi considérer la percolation sur une grille (un réseau de carrés). Bien que ce

modèle soit un peu différent du modèle hexagonal décrit dans le corps du texte, il partage avec lui de nombreuses particularités. Par exemple, il présente également une transition de phase ayant les mêmes propriétés que celle de la percolation sur les hexagones.



Cette ressemblance entre des modèles *a priori* différents est nommée universalité : les propriétés macroscopiques de ces systèmes ne dépendent pas de la géométrie locale (hexagonale/carrée), mais seulement de propriétés générales (ici, l'indépendance entre les différentes faces/arêtes).

Par ailleurs, la percolation ne se restreint pas à la dimension 2. On peut par exemple étudier la percolation sur un réseau cubique (*voir la figure*). Elle est beaucoup plus mystérieuse que la percolation sur le réseau plan hexagonal. Le fait d'être en dimension trois complique beaucoup la tâche et certaines questions très élémentaires figurent parmi les conjectures les plus importantes en théorie des probabilités. Remarquons que la dimension trois est celle de l'espace où nous vivons, et il est donc d'autant plus fondamental de la comprendre.

Paradoxalement, la percolation sur des graphes en dimension très supérieure à trois est bien mieux comprise, car ces graphes ressemblent alors à s'y méprendre à des arbres, c'est-à-dire des graphes sans boucles. La percolation sur les arbres est beaucoup plus facile à analyser et a des interprétations en termes de phylogénie.

les angles, mais pas nécessairement les distances. Les exemples les plus simples sont les translations, les rotations et les homothéties, mais il en existe une infinité d'autres (*voir la figure 3*). En fait, on montre que toute fonction analytique f d'une variable complexe z représente une transformation conforme dans le plan (« analytique » signifie qu'au voisinage de tout point z_0 , $f(z)$ peut s'exprimer sous la forme d'une somme, éventuellement infinie, de puissances entières de $(z - z_0)$). La remarquable prédiction BPZ, du nom de ses trois auteurs, fit naître un domaine entier de la physique : la théorie conforme des champs, dont les ramifications vont jusqu'à la théorie des cordes.

Du carré au rectangle

Dans le cas de la percolation et de ses probabilités de traverser d'un côté à l'autre, la prédiction BPZ implique que la probabilité limite est identique dans deux pièces différentes à condition que l'on puisse transformer l'une de ces pièces en l'autre par une transformation conforme. C'est ce qui permit au physicien britannique John Cardy de prédire, au début des années 1990, la valeur de la probabilité limite.

La formule qui donne, pour un rectangle, la probabilité limite d'être traversable est une expression compliquée, où interviennent des fonctions dites hypergéométriques. Toutefois, le mathématicien suédois Lennart Carleson (prix Abel en 2006 pour l'ensemble de son œuvre) remarqua qu'elle revêt une forme particulièrement élégante lorsque la pièce a une forme de triangle équilatéral (*voir la figure 4*).

Plus précisément, notons A, B et C les coins de cette pièce. Comme nous avons jusqu'ici considéré des pièces à quatre murs, ne nous arrêtons pas en si bon chemin et plaçons le quatrième coin D de la pièce sur le segment CA (de longueur un), à distance x de A. On a donc une pièce à quatre murs, AB, BC, CD et DA. La formule de Cardy est alors très simple : la probabilité limite que l'on puisse traverser depuis le mur DA jusqu'au mur opposé BC est égale à x . Ce résultat n'est pas surprenant lorsque $x = 1/2$, le raisonnement fait dans le cas du carré pouvant être adapté à ce cas particulier. En revanche, pour des valeurs différentes de x , il est stupéfiant.

J. Cardy s'était appuyé sur de nombreux résultats de théorie conforme des champs qui ne sont pas prouvés. Restait

donc à démontrer rigoureusement sa formule. La dernière pierre de l'édifice fut posée en 2001 par le mathématicien russe Stanislav Smirnov, de l'Université de Genève: il apporta enfin, avec 107 ans de retard, la réponse attendue par l'éditeur de *The American Mathematical Monthly*. Elle porte le nom de formule de Cardy-Smirnov. L'élégante preuve de S. Smirnov, qui tient en quelques pages, utilise de façon fondamentale les transformations conformes. Elle a valu à ce chercheur de nombreux prix, en particulier une médaille Fields en 2010.

Intéressons-nous maintenant à la deuxième question de Maxime. On suppose qu'il se trouve au seuil de sa cuisine, à l'intersection de deux hexagones du bord de son carrelage, un bleu à sa gauche et un jaune à sa droite. Il se donne pour objectif de traverser la pièce en marchant sur les jointures entre hexagones, avec comme unique règle de laisser les hexagones bleus sur sa gauche et les jaunes sur sa droite.

Fractales et aléatoires

Remarquez que Maxime n'a aucun choix lorsqu'il n'est pas sur le bord de la pièce carrelée: à chaque nouveau pas, il découvre devant lui un hexagone, bleu ou jaune, qui détermine la direction (gauche ou droite) où il doit aller. La seule indétermination survient lorsqu'il touche le bord. Dans ce cas, il marche le long du bord dans la direction qui lui permettra d'atteindre le bord opposé sans couper le chemin déjà parcouru. La courbe obtenue en suivant le chemin de Maxime est nommée processus d'exploration (voir la figure 5). Ce processus s'achève dès que Maxime touche le mur opposé. Répondre à la question de Maxime revient alors à estimer la longueur de la courbe.

La courbe d'exploration peut décrire un objet physique tel qu'une interface ou une frontière. Imaginons que le bord du domaine sur la droite de Maxime soit complètement colorié en jaune et représente le sable de la plage, tandis que le bord sur la gauche est colorié en bleu et représente la mer. Le processus d'exploration décrit alors la frontière entre la mer et la plage, la mer contenant des îlots et la plage des flaques d'eau.

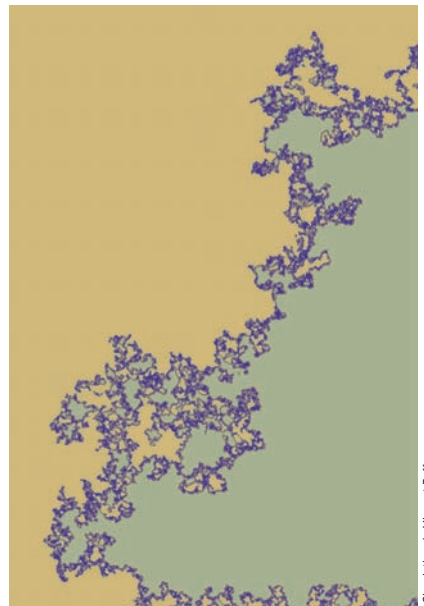
Comme pour la probabilité de traverser une pièce, on peut procéder à l'approximation qui consiste à faire tendre la taille des hexagones vers zéro. Les mathé-

maticiens et les physiciens s'attendent alors à ce que le processus d'exploration prenne l'allure d'une courbe aléatoire. De quel type? En 1999, Oded Schramm, un brillant mathématicien israélien mort en 2008 dans un accident de montagne, introduisit un candidat naturel pour cette courbe. En utilisant des travaux de 1923 de Charles Loewner, mathématicien d'origine tchèque, Schramm a découvert une famille de courbes planes aléatoires construites à partir de transformations conformes et du mouvement brownien à une dimension. Ces courbes continues et aléatoires (voir la figure 6), paramétrées par un nombre réel k , sont notées SLE_k (pour *Schramm-Loewner Evolution*). Ce sont des fractales aléatoires, c'est-à-dire des courbes aléatoires qui gardent le même aspect quelle que soit l'échelle à laquelle on les examine.

Schramm avait conjecturé des liens entre les limites d'échelle de plusieurs modèles bidimensionnels et les courbes SLE_k , notamment SLE_6 pour la percolation décrite ici. En 2001, S. Smirnov, encore lui, parvint à le démontrer pour la percolation.

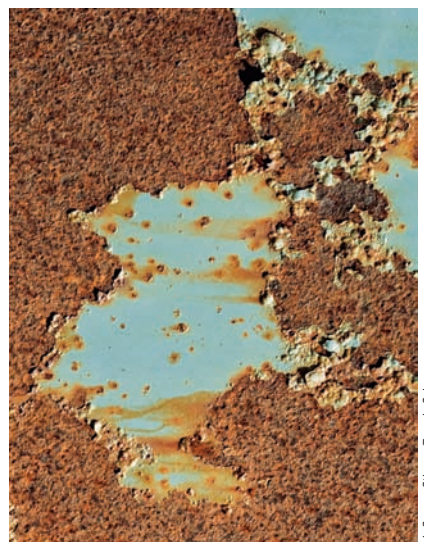
Revenons au nombre de pas nécessaires pour traverser la pièce ou, autrement dit, au nombre de pas de l'exploration discrète. Le résultat de S. Smirnov permet d'approcher le chemin d'exploration par une courbe continue SLE_6 . On ne peut pas calculer la longueur de cette dernière, puisqu'elle est fractale (sa longueur serait infinie!). On peut en revanche calculer sa dimension fractale, liée au nombre d'hexagones de taille L qui sont nécessaires pour la couvrir complètement. Lorsque L tend vers zéro, on montre que ce nombre tend vers l'infini de la même façon que $1/L^{4/3}$, et la dimension fractale de la courbe d'exploration est alors égale à $4/3$. Pour une droite, le nombre d'hexagones augmenterait comme $1/L$, d'où une dimension fractale égale à 1, comme attendu.

On en déduit que le nombre d'hexagones de taille L nécessaires pour couvrir la courbe d'exploration discrète est de l'ordre de $1/L^{4/3}$. Si les hexagones du carrelage sont également de taille L , ce nombre correspond exactement au nombre de pas nécessaires pour traverser la pièce. Imaginons que la taille des hexagones du carrelage de Maxime soit de dix centimètres (0,1 mètre) et que la pièce fasse dix mètres de bout en bout: il faudra environ $(10/0,1)^{4/3} = 317$ petits pas à Maxime pour traverser la cuisine.



Simulation de Vincent Beffara

6. UNE SIMULATION de la courbe de Schramm notée SLE_6 , qui est reliée à la limite d'échelle du modèle de la percolation, c'est-à-dire la limite obtenue lorsque la taille des cases tend vers zéro. Cette courbe est aléatoire et fractale.



J. Graczy Stinson Pour la Science

7. LA FRONTIÈRE ENTRE LA RÉGION rouillée et le domaine intact de cette plaque de fer ressemble à une courbe SLE. De fait, certains liens ont été établis entre les phénomènes de corrosion et la percolation.