

donc à démontrer rigoureusement sa formule. La dernière pierre de l'édifice fut posée en 2001 par le mathématicien russe Stanislav Smirnov, de l'Université de Genève: il apporta enfin, avec 107 ans de retard, la réponse attendue par l'éditeur de *The American Mathematical Monthly*. Elle porte le nom de formule de Cardy-Smirnov. L'élégante preuve de S. Smirnov, qui tient en quelques pages, utilise de façon fondamentale les transformations conformes. Elle a valu à ce chercheur de nombreux prix, en particulier une médaille Fields en 2010.

Intéressons-nous maintenant à la deuxième question de Maxime. On suppose qu'il se trouve au seuil de sa cuisine, à l'intersection de deux hexagones du bord de son carrelage, un bleu à sa gauche et un jaune à sa droite. Il se donne pour objectif de traverser la pièce en marchant sur les jointures entre hexagones, avec comme unique règle de laisser les hexagones bleus sur sa gauche et les jaunes sur sa droite.

Fractales et aléatoires

Remarquez que Maxime n'a aucun choix lorsqu'il n'est pas sur le bord de la pièce carrelée: à chaque nouveau pas, il découvre devant lui un hexagone, bleu ou jaune, qui détermine la direction (gauche ou droite) où il doit aller. La seule indétermination survient lorsqu'il touche le bord. Dans ce cas, il marche le long du bord dans la direction qui lui permettra d'atteindre le bord opposé sans couper le chemin déjà parcouru. La courbe obtenue en suivant le chemin de Maxime est nommée processus d'exploration (voir la figure 5). Ce processus s'achève dès que Maxime touche le mur opposé. Répondre à la question de Maxime revient alors à estimer la longueur de la courbe.

La courbe d'exploration peut décrire un objet physique tel qu'une interface ou une frontière. Imaginons que le bord du domaine sur la droite de Maxime soit complètement colorié en jaune et représente le sable de la plage, tandis que le bord sur la gauche est colorié en bleu et représente la mer. Le processus d'exploration décrit alors la frontière entre la mer et la plage, la mer contenant des îlots et la plage des flaques d'eau.

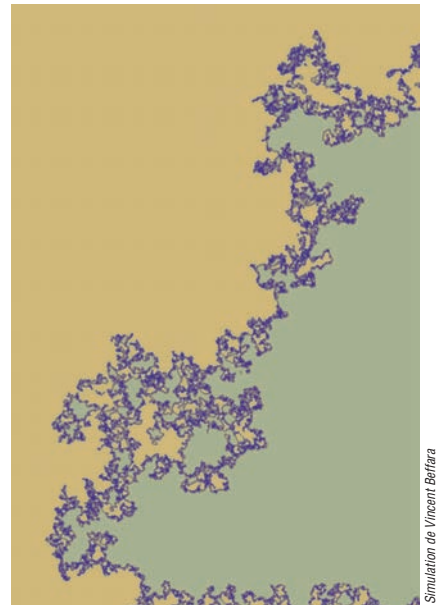
Comme pour la probabilité de traverser une pièce, on peut procéder à l'approximation qui consiste à faire tendre la taille des hexagones vers zéro. Les mathé-

maticiens et les physiciens s'attendent alors à ce que le processus d'exploration prenne l'allure d'une courbe aléatoire. De quel type? En 1999, Oded Schramm, un brillant mathématicien israélien mort en 2008 dans un accident de montagne, introduisit un candidat naturel pour cette courbe. En utilisant des travaux de 1923 de Charles Loewner, mathématicien d'origine tchèque, Schramm a découvert une famille de courbes planes aléatoires construites à partir de transformations conformes et du mouvement brownien à une dimension. Ces courbes continues et aléatoires (voir la figure 6), paramétrées par un nombre réel k , sont notées SLE_k (pour *Schramm-Loewner Evolution*). Ce sont des fractales aléatoires, c'est-à-dire des courbes aléatoires qui gardent le même aspect quelle que soit l'échelle à laquelle on les examine.

Schramm avait conjecturé des liens entre les limites d'échelle de plusieurs modèles bidimensionnels et les courbes SLE_k , notamment SLE_6 pour la percolation décrite ici. En 2001, S. Smirnov, encore lui, parvint à le démontrer pour la percolation.

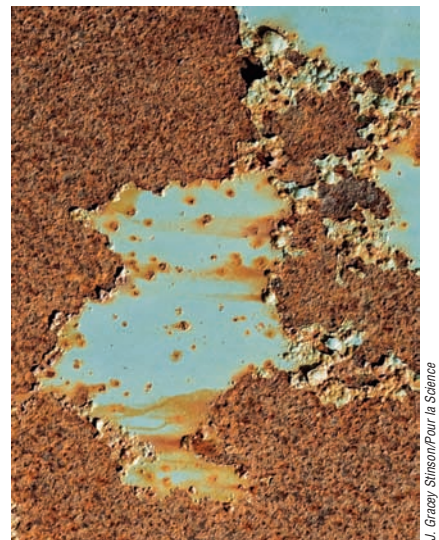
Revenons au nombre de pas nécessaires pour traverser la pièce ou, autrement dit, au nombre de pas de l'exploration discrète. Le résultat de S. Smirnov permet d'approcher le chemin d'exploration par une courbe continue SLE_6 . On ne peut pas calculer la longueur de cette dernière, puisqu'elle est fractale (sa longueur serait infinie!). On peut en revanche calculer sa dimension fractale, liée au nombre d'hexagones de taille L qui sont nécessaires pour la couvrir complètement. Lorsque L tend vers zéro, on montre que ce nombre tend vers l'infini de la même façon que $1/L^{4/3}$, et la dimension fractale de la courbe d'exploration est alors égale à $4/3$. Pour une droite, le nombre d'hexagones augmenterait comme $1/L$, d'où une dimension fractale égale à 1, comme attendu.

On en déduit que le nombre d'hexagones de taille L nécessaires pour couvrir la courbe d'exploration discrète est de l'ordre de $1/L^{4/3}$. Si les hexagones du carrelage sont également de taille L , ce nombre correspond exactement au nombre de pas nécessaires pour traverser la pièce. Imaginons que la taille des hexagones du carrelage de Maxime soit de dix centimètres (0,1 mètre) et que la pièce fasse dix mètres de bout en bout: il faudra environ $(10/0,1)^{4/3} = 317$ petits pas à Maxime pour traverser la cuisine.



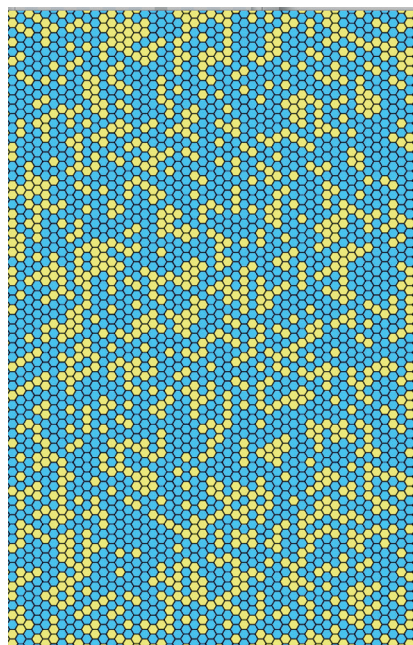
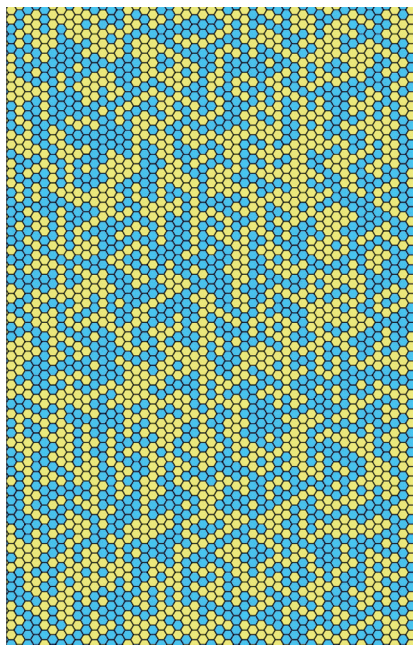
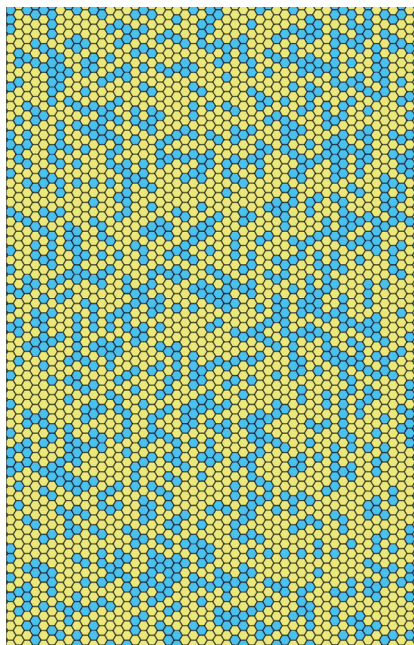
Simulation de Vincent Beffara

6. UNE SIMULATION de la courbe de Schramm notée SLE_6 , qui est reliée à la limite d'échelle du modèle de la percolation, c'est-à-dire la limite obtenue lorsque la taille des cases tend vers zéro. Cette courbe est aléatoire et fractale.



J. Grady, Stinson/Pour la Science

7. LA FRONTIÈRE ENTRE LA RÉGION rouillée et le domaine intact de cette plaque de fer ressemble à une courbe SLE. De fait, certains liens ont été établis entre les phénomènes de corrosion et la percolation.



8. SELON LA VALEUR DE LA PROBABILITÉ de choisir un carreau bleu, l'allure du réseau et ses propriétés seront différentes. Le réseau est illustré ici pour trois valeurs de cette probabilité p : 0,35 (à gauche), 0,5 (au

milieu) et 0,65 (à droite). Pour $p < 1/2$ (et pour un réseau de taille infinie), la probabilité d'avoir un chemin percolant bleu, qui traverse tout le réseau, est nulle. Elle est strictement positive dès que $p > 1/2$.

BIBLIOGRAPHIE

V. Beffara et H. Duminil-Copin, *Lectures on planar percolation with a glimpse of Schramm-Loewner Evolution*, juin 2011 (www.unige.ch/~duminil/publi/lecture_notes_percolation.pdf).

W. Werner, *Percolation et modèle d'Ising*, *Cours spécialisés*, vol. 16, Société mathématique de France, 2009.

S. Smirnov, *Towards conformal invariance of 2D lattice models*, *International congress of mathematicians*, vol. II, pp. 1421-1451, European Mathematical Society, Zurich, 2006 (<http://arxiv.org/abs/0708.0032>).

W. Kager et B. Nienhuis, *A guide to stochastic Löwner evolution and its applications*, 2006 (<http://arxiv.org/abs/math-ph/0312056>).

G. Grimmett, *Percolation*, Springer, 1999.

B. Sapoval, *Universalités et fractales*, Flammarion, 1997.

De nombreuses autres questions peuvent être posées sur ce modèle de percolation. Supposons par exemple que l'un de ses enfants ait dupé Maxime en lui fournissant une pièce de monnaie biaisée. Celle-ci tombera sur face avec la probabilité p et donc sur pile avec probabilité $1 - p$, mais p ne vaut plus $1/2$. La situation est alors très différente (voir la figure 8). Si $p < 1/2$, on verra surtout des hexagones jaunes. Au contraire, lorsque $p > 1/2$, les bleus dominent. C'est très différent du cas $p = 1/2$, où les nombres de cases jaunes et bleues sont équilibrés.

Un exemple de système critique

Imaginons que l'on considère des hexagones de plus en plus petits; ou, ce qui revient au même, que les hexagones soient de taille fixée et que l'on considère une cuisine de plus en plus grande. Une question naturelle est la suivante: quelle est la probabilité que l'on puisse rallier le bord de la pièce en partant du centre et en ne marchant que sur des hexagones bleus?

Lorsque $p < 1/2$, nous sommes presque sûrement sur une petite île et il nous sera impossible de nous en échapper: la probabilité de pouvoir rejoindre le bord par un chemin bleu tend vers 0 lorsque la cuisine grandit. En revanche, lorsque

$p > 1/2$, la probabilité de pouvoir nous échapper restera supérieure à une certaine valeur, et ce indépendamment de la taille de la pièce. En fait, si l'on prolonge la pièce à l'infini, un hexagone appartiendra à un chemin infini d'hexagones bleus contigus avec une probabilité positive. Ce phénomène constitue la transition de phase de la percolation et a été prouvé en 1982 par Harry Kesten, de l'Université Cornell.

Les physiciens disent qu'un système est dans un état critique si toute variation infime des paramètres entraîne un bouleversement global du système. La valeur $p = 1/2$ est donc la valeur critique du modèle de la percolation. Si l'on diminue un tout petit peu p , on obtient un continent d'hexagones jaunes qui s'étend d'un bout à l'autre du réseau; si l'on augmente un tout petit peu p , on obtient au contraire une mer d'hexagones bleus.

L'étude d'une transition de phase qui se produit pour une valeur critique d'un paramètre est au cœur de la physique statistique d'aujourd'hui (voir l'encadré page 51). Les modèles de percolation, dont la formulation est simple, voire ludique, rentrent dans ce cadre. À l'instar d'autres modèles de la physique statistique, ils se révèlent d'un grand intérêt pour la physique, la biologie et d'autres sciences, et offrent aux mathématiciens un terrain... de jeu encore loin d'être épuisé. ■