la multiplication sur l'addition). C'est un exemple de ce qu'on appelle en mathématiques un corps *(voir l'encadré page 27)*; et comme il n'a qu'un nombre fini d'éléments, on dit que c'est un corps fini.

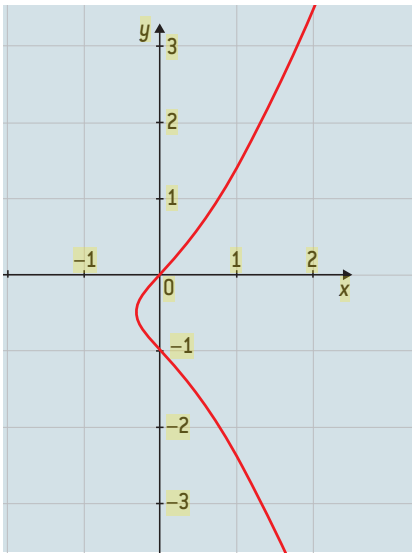
Dans sa note, Galois explique ensuite un certain nombre des propriétés de ces corps finis. Il commence par démontrer que dans un corps fini ayant p^d éléments, tout élément a vérifie $a^{(p^d)} = a$; cela généralise la congruence classique, dénommée « petit théorème de Fermat », selon laquelle $a^p \equiv a \pmod p$ pour tout entier a et tout nombre premier p. Il démontre aussi qu'il existe une « racine primitive » de cette équation $a^{(p^d)} = a$, autrement dit un élément non nul a tel que la suite 0, 1, a, a^2, ..., $a^{(p^d-2)}$ décrive exactement le corps fini.

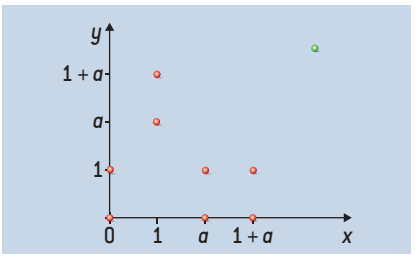
Pour construire un corps fini de « cardinal » p^d, c'est-à-dire ayant p^d éléments, par la méthode expliquée par Galois, il faut partir d'un polynôme F de degré d qui est irréductible modulo p. Galois explique alors qu'un tel polynôme est un facteur modulo p du polynôme $x^{(p^d)} - x$. Peu après, le mathématicien et astronome français Joseph Serret a démontré que l'on peut effectivement trouver un tel facteur, de sorte que, pour chaque puissance p^d d'un nombre premier p, il existe un corps fini de cardinal p^d. Et ce corps est même unique au sens où, pour deux corps finis de même cardinal (obtenus par exemple en suivant la construction de Galois pour deux polynômes F_1 et F_2), on a un dictionnaire reliant un à un les éléments des deux corps qui est compatible avec les règles de calcul (les mathématiciens disent que les deux corps sont isomorphes).

Des corps finis à la cryptographie

Dans les décennies qui ont suivi la note de Galois, plusieurs mathématiciens ont complété les travaux de Galois et formalisé la notion de corps telle qu'elle est présentée dans l'encadré page 27. À la mort de Gauss, en 1855, on a retrouvé un huitième chapitre de ses *Disquisitiones*, qu'il avait écrit en 1797 mais qui n'a été publié par le mathématicien allemand Richard Dedekind qu'en 1863. Dans ce texte, Gauss développait une théorie très proche de celle que Galois avait inventée.

La théorie des corps finis a rapidement montré son importance pour les mathématiques. C'en est aujourd'hui un outil crucial, y compris dans des domaines qui, à première vue, semblent ne pas relever de l'arithmétique tels que la théorie des fonctions automorphes et le programme de Langlands (un grand ensemble de conjectures techniques liant algèbre, théorie des fonctions et théorie des nombres).





2. L'ÉQUATION D'UNE COURBE plane est de la forme $f(x, y) = 0$, à l'instar de l'équation $y^2 + y = x^3 + x^2 + x$ de la courbe elliptique ci-contre. Mais une telle équation peut aussi être considérée dans un corps fini, et non sur le corps des nombres réels. Ainsi, dans le corps à $4 = 2^2$ éléments ($p = 2$, $d = 2$) formés par les polynômes 0, 1, a et $1 + a$ (où l'on a $1 + 1 = 0$ et $a^2 = a + 1$), la courbe elliptique considérée possède huit points *(graphe ci-dessus)* en plus du point 0 à l'infini *(en vert)*.

Les corps finis sont aussi au cœur des télécommunications modernes et des mécanismes intimes du réseau Internet, en particulier dans tout ce qui touche à la sécurité du commerce électronique. Lorsque vous achetez en ligne un livre, un disque ou un appareil photo, vient inévitablement le moment du paiement où il vous faut transmettre votre numéro de carte bancaire. Évidemment, vous aimeriez être certain qu'aucune personne non autorisée ne puisse obtenir ce numéro et l'utiliser à son profit. On est ainsi face à un problème classique de cryptographie : transmettre un message à son destinataire, et que seul ce dernier puisse en avoir connaissance.

Jusque vers 1975, les seuls procédés connus de cryptographie étaient symétriques. L'émetteur et le destinataire conviennent d'un code secret, lequel sert aussi bien à coder un message qu'à le décoder. Dans sa *Vie des douze Césars*, l'historien romain Suétone écrivait à propos de Jules César qu'il « y employait, pour les choses tout à fait secrètes, une espèce de chiffre qui en rendait le sens inintelligible (les lettres étant disposées de manière à ne pouvoir jamais former un mot), et qui consistait, je le dis pour ceux qui voudront les déchiffrer, à changer le rang des lettres dans l'alphabet, en écrivant la quatrième pour la première, c'est-à-dire le d pour le a, et ainsi de suite ». Comme le suggère très bien Suétone, si vous savez comment Jules César procède pour coder un message, vous êtes aussitôt en mesure de déchiffrer un message qu'il a écrit, même si vous n'en êtes pas le destinataire.

Un tel mécanisme n'est pas très utile pour le commerce en ligne puisqu'un site Web ne peut pas matériellement prendre contact avec tous ses clients potentiels et convenir, avec chacun d'entre eux, d'un tel code secret. En 1976, les Américains Whitfield Diffie, Martin Hellman et Ralph Merkle proposèrent un nouveau type de procédé, nommé aujourd'hui cryptographie asymétrique.

Dans ce schéma, n'importe qui est capable de coder des messages, mais seul son destinataire peut les décoder. Pour cela, le destinataire dispose de deux clefs ; l'une est connue de tous et permet de coder les messages, tandis que l'autre, qui permet de décoder les messages, est gardée secrète. En 1978, au MIT, Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman inventèrent un tel protocole, appelé depuis RSA et très largement utilisé aujourd'hui, y compris dans des consoles de jeu.

Du point de vue mathématique, on peut penser à la cryptographie comme à deux ensembles de symboles, celui des messages et celui des messages codés (un message étant alors une suite de symboles), et à deux applications, l'une qui transforme un symbole en un symbole codé et l'autre qui transforme un symbole codé en un symbole en clair. Dans le schéma de Jules César, les deux ensembles sont les lettres de l'alphabet (latin) ; la fonction qui code un message décale les lettres de trois crans vers la gauche, celle qui décode les décale de trois crans vers la droite.