

ART & SCIENCE

Donner à voir les mathématiques

Une exposition se propose de rendre perceptibles les mathématiques et l'esprit de ceux qui les font : pour cela, mathématiciens et artistes se sont associés pour transformer des idées abstraites en œuvres d'art.

Loïc MANGIN

Comment rendre compte des mathématiques ? Comment concilier l'art avec la pensée abstraite des mathématiciens ?

Comment représenter leurs idées, leurs intuitions, leur création ? La *Fondation Cartier pour l'art contemporain*, à Paris, à travers son directeur, Hervé Chandès, a voulu relever le défi. Il s'est tourné vers un lieu d'excellence de cette discipline, l'Institut des hautes études scientifiques (IHÉS), à Bures-sur-Yvette, pour réfléchir à une façon artistique d'exposer les mathématiques en restant au plus près d'elles. Il s'agissait d'instaurer un dialogue entre artistes et mathématiciens. Le résultat de cette collaboration est l'exposition *Mathématiques, un dépaysement soudain*, un titre qui reprend une expression du mathématicien Alexandre Grothendieck.

Six mathématiciens ont accepté de se prêter à l'exercice : sir Michael Atiyah, Alain Connes, Nicole El Karoui, Mikhaïl Gromov, Don Zagier et Cédric Villani. Les artistes sollicités, des habitués de la *Fondation Cartier*, sont les cinéastes Raymond Depardon, Claudine Nougaret et David Lynch, la chanteuse Patti Smith, la peintre Beatriz Milhazes, le plasticien Jean-Michel Alberola et, enfin, le photographe et sculpteur Hiroshi Sugimoto. Voyons comment ce dernier s'est emparé des mathématiques à travers une sculpture (voir la figure a) et une photographie (voir la figure b).

Il échange depuis 2004 avec Jean-Pierre Bourguignon, directeur de l'IHÉS et commissaire de l'exposition à venir (avec l'astrophysicien Michel Cassé). À cette époque,

H. Sugimoto présentait une série de 19 photographies prises au musée de l'Université de Tokyo. J.-P. Bourguignon avait rédigé les notices de chacune d'elles. De fait, certaines représentent des modèles stéréométriques en plâtre destinés à faciliter la visualisation de fonctions mathématiques complexes. Man Ray avait fait de même au début du XX^e siècle avec des objets conservés à l'Institut Henri Poincaré, à Paris.

**Hiroshi Sugimoto
sculpte avec des outils
perfectionnés, tels
des robots, pour accéder
à la rigueur mathématique.**

H. Sugimoto ne fait pas que photographier les objets mathématiques, il les sculpte aussi, à plus grande échelle. Pour ce faire, il utilise les outils perfectionnés d'aujourd'hui, tels des robots, pour coller au mieux à la précision et à la rigueur mathématiques du modèle. L'observation de la photographie et de la sculpture (de trois mètres de hauteur) révèle la différence. Le modèle mathématique illustré *via* ces deux médiums est une surface à courbure constante négative. Cet objet est défini par trois équations (voir la figure c) où x , y et z définissent l'objet dans l'espace à trois dimensions de la même façon que l'on peut définir une sphère (une surface) dans l'espace. Les paramètres u et v

correspondent aux coordonnées nécessaires pour se repérer sur cette surface ; ils sont équivalents à la latitude et à la longitude utilisées sur une sphère.

Cette surface est la représentation d'une géométrie dite hyperbolique, car sa courbure est négative en tout point. Cela se traduit, pour tout triangle donné, à une somme des angles inférieure à 180 degrés. Rappelons que sur un plan euclidien, cette somme est égale à 180 degrés et que sur une surface à courbure positive, par exemple sphérique, elle est supérieure à 180 degrés.

Que pourra-t-on voir encore ? À partir de la bibliographie de Henri Poincaré, J.-M. Alberola a conçu une carte du ciel mathématique où des « constellations » réunissent des références partageant des thèmes communs. D. Lynch a mis en scène le rez-de-chaussée du bâtiment à partir d'une intense correspondance avec M. Gromov. Ce dernier a notamment proposé l'idée d'une bibliothèque « idéale » rassemblant un choix personnel de livres, des classiques de l'Antiquité à ceux plus récents, tels les ouvrages de Richard Feynman. Sur une idée d'A. Connes, R. Depardon et Cl. Nougaret ont filmé plusieurs mathématiciens qui, en quatre minutes, expliquent leur rapport aux mathématiques, leurs idées... Et bien d'autres choses qui permettront d'accéder à la magie des mathématiques à travers l'esthétique ! ■

Mathématiques, un dépaysement soudain, à la Fondation Cartier, du 21 octobre 2011 au 19 février 2012. <http://fondation.cartier.com>



© H. Sugimoto / Courtesy of Gallery Koyanagi



c

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos u}{\cosh v} \\ y &= \frac{\sin u}{\cosh v} \\ z &= v - \tanh v \\ (0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < \infty) \end{aligned}$$

IDÉES DE PHYSIQUE

Juste une mise au point

Les appareils photo plénoptiques ouvrent la voie à des images qui sont nettes là où on veut, avec une mise au point effectuée après la prise de vue.

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

Une erreur de mise au point à la prise de vue et voici que le gracieux visage, en partie dissimulé derrière les branches, est immortalisé flou sur la pellicule ou le capteur. Est-ce une fatalité des lois de la physique ? Des travaux récents montrent qu'il n'en est rien. Grâce à l'informatique, des idées datant de plus d'un siècle prennent vie dans de nouveaux appareils, où la capture optique de l'énergie lumineuse et des informations qu'elle transporte est complètement dissociée de la reconstitution, par le calcul, de la scène photographiée. Ces appareils permettent d'effectuer la mise au point sur la partie de la scène de son choix... après avoir pris la photo, et l'on parvient même à obtenir une photo nette partout !

Du sténopé à l'objectif classique

La crainte d'obtenir une image floue était inconnue de Nicéphore Niepce, le premier photographe. Une chambre noire percée à l'avant par un petit trou et équipée à l'arrière d'un dispositif sensible à la lumière, tel est le sténopé, un appareil photographique rudimentaire mais aux indéniables qualités. Idéalement, dans la limite d'un trou ponctuel, le sténopé réalise une projection sur un plan de l'espace situé devant le trou : à partir d'un point du paysage, un seul rayon lumineux traverse le trou et atteint le capteur (voir la figure 1). Cette correspondance biunivoque assure que l'image (à l'envers), obtenue avec un très grand champ angulaire, sera nette partout, sans distorsion. Un rêve de photographe !

En pratique, des limitations surgissent. Le trou du sténopé doit être assez petit ; sinon, un point du capteur pourrait recueillir des rayons issus de différents points du paysage. Mais si le trou est trop petit, le phénomène de diffraction élargit le pinceau lumineux après le trou et forme sur le capteur une tache d'autant plus étendue que le trou est petit. La taille optimale, pour laquelle la taille du trou est égale à celle de la tache de diffraction, est de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre pour des distances trou-capteur de quelques centimètres.

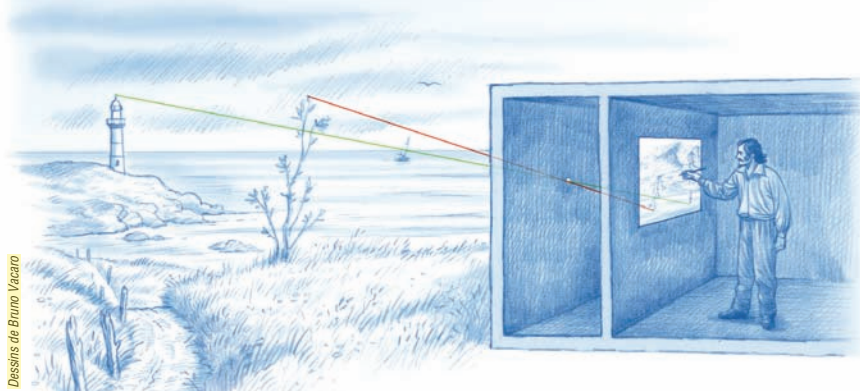
Or très peu de la lumière ambiante traverse un trou aussi petit. Si les capteurs actuels ne nécessitent plus d'attendre huit heures comme Niepce pour sa première photographie, les temps de pose sont forcément longs, souvent de plusieurs minutes... ce qui limite fortement l'utilisation du sténopé.

L'appareil photographique tel que nous le connaissons est une réponse à ce manque

de lumière : l'objectif recueille sur une grande surface la lumière issue d'un point du paysage et la focalise en un point sur le capteur. Hélas, cette correspondance point par point n'est valable, pour une position donnée de l'objectif, que pour un seul plan du paysage, le « plan objet » (voir la figure 2).

La lumière des autres éléments du paysage converge au-delà ou en deçà du capteur : sur ce dernier, les points hors plan donnent donc des taches et seul le plan objet est net sur l'image – en théorie. En pratique, il faut compter avec la taille des pixels et la résolution de l'œil. Une toute petite tache ne produit pas nécessairement une sensation de flou : aussi, c'est toute une zone autour du plan objet qui apparaît nette. La dimension de cette zone définit la « profondeur de champ ».

En réduisant l'ouverture de l'objectif, c'est-à-dire en fermant le diaphragme, le photographe élimine les pinceaux lumineux



1. DANS UNE « CHAMBRE NOIRE », un petit trou, nommé sténopé, remplit le rôle de l'objectif. Pour chaque point source, il ne laisse passer qu'un seul pinceau lumineux. L'image, formée à l'envers, est alors nette partout. Mais le trou laisse passer très peu de lumière, d'où des temps de pose très longs. Des peintres exploitaient le procédé pour reproduire fidèlement une scène.

les plus éloignés de l'axe et réduit la taille des taches sur le capteur ; cela améliore la netteté et accroît la profondeur de champ. En revanche, comme on collecte moins de lumière, il faut augmenter le temps d'exposition. On retrouve le compromis entre temps d'exposition (priorité à la vitesse, dans les appareils) et luminosité (priorité au diaphragme).

Des microlentilles pour récupérer l'information

Cependant, la netteté partout n'est pas irrémédiablement perdue. Gabriel Lippmann, physicien français et lauréat du Nobel, s'interrogeait déjà au début du XX^e siècle : comment la photographie peut-elle rendre la variété de la vue directe des objets ? Il a découvert une réponse : la photographie « intégrale » [1908], dite aujourd'hui plénoptique. Plutôt que de capter la lumière avec un objectif de grand diamètre, il s'agit de capter la même quantité de lumière avec plusieurs objectifs plus petits et de former autant de petites photos.

Quel est l'avantage de ce procédé ? Considérons un objectif classique et découpons par la pensée sa surface en une multitude de petites cellules. En sélectionnant avec un diaphragme la lumière passant par l'une de ces cellules, on obtient au niveau du capteur une photo nette, mais peu lumineuse. On peut alors interpréter la photographie obtenue avec l'objectif entier comme l'addition de ces multiples images.

Toutefois, comme chacune de ces images montre la scène d'un point de vue différent (c'est l'effet de parallaxe), les images additionnées ne sont pas identiques. Il est possible de les superposer parfaitement si tous les objets observés sont à la même distance ; ce n'est pas le cas s'ils sont à des distances différentes, et la moyenne introduit du flou.

Ces multiples images, avant qu'elles ne soient superposées, portent l'information de parallaxe. Elles permettent donc d'estimer la position des objets dans l'espace, comme on le fait en stéréoscopie binocu-

laire. Encore faut-il savoir récupérer cette information pour restituer une image nette. Lippmann avait imaginé dès 1908 comment réaliser cela de façon optique, mais les limites techniques, le coût et le soin nécessaires à chaque prise de vue étaient prohibitifs pour une grande diffusion.

En 1992, Edward Adelson et John Wang, deux chercheurs du MIT (l'Institut de technologie du Massachusetts), ont ouvert la voie à la conception d'appareils photo plénoptiques guère plus encombrants que les appareils habituels, à condition de disposer d'algorithmes puissants de traitement

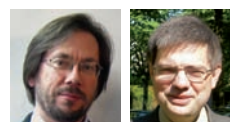


2. DANS UN APPAREIL PHOTO CLASSIQUE, la lumière issue de points sources situés à des distances différentes de l'objectif ne converge pas en des points situés sur le même plan. Le plan du capteur ne peut donc pas enregistrer une image qui soit nette partout. Le photographe doit choisir lors de la prise de vue la région qui doit être nette.



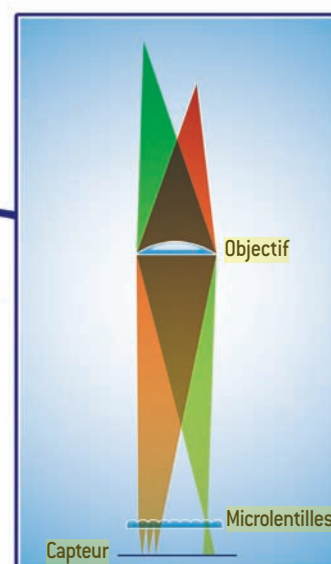
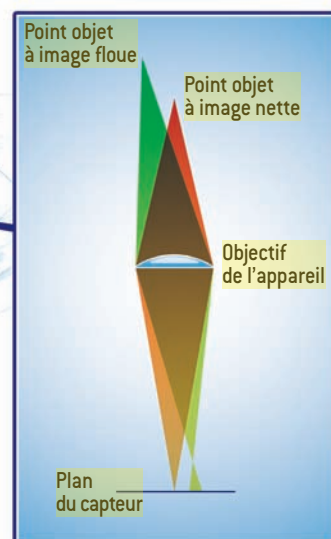
3. DANS UN APPAREIL PHOTO PLÉNOPTIQUE, un réseau de microlentilles est placé en avant du capteur. La lumière issue d'un point source n'est pas forcément focalisée sur le plan du capteur, mais l'information sur la position de ce point est contenue dans la répartition des pixels éclairés sur le capteur. Un traitement informatique des données permet alors, après la prise de vue, de construire une image nette à l'endroit souhaité, voire une image nette partout.

LES AUTEURS



Jean-Michel COURTUY et Édouard KIERLIK sont professeurs de physique à l'Université Pierre et Marie Curie, à Paris. Leur blog : <http://blog.idphys.fr>

Retrouvez les articles de J.-M. Courtuy et E. Kierlik sur www.pourlascience.fr



✓ BIBLIOGRAPHIE

E. H. Adelson et J. Y. A. Wang, **Single lens stereo with a plenoptic camera**, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 14(2), pp. 99-106, 1992.

M. G. Lippmann, **Épreuves réversibles. Photographies intégrales**, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 146(9), pp. 446-451, 1908.

Integral photography, a new discovery by professor Lippmann, *Scientific American*, p. 164, 19 août 1911 [voir <http://www.tgeorgiev.net/>].

de l'information. En pratique, au lieu d'utiliser un objectif composite, ils placent un réseau de microlentilles derrière un objectif classique (voir la figure 3).

À chacune de ces microlentilles correspond sur le capteur un « macropixel » qui regroupe plusieurs pixels, typiquement 5×5 . Par définition, la lumière d'un point net se focalise sur le capteur et n'éclaire que l'un de ces macropixels. Un point flou éclaire plusieurs macropixels, mais la lumière arrive sur chacun d'eux avec une inclinaison différente. C'est là qu'interviennent la microlentille et les pixels qui composent le macropixel : seuls certains d'entre eux sont éclairés, selon l'angle d'arrivée de la lumière. Connaissant la position et l'angle d'incidence des rayons, un calcul permet de reconstituer le trajet des rayons lumineux et d'obtenir l'image correspondant au plan

de mise au point que l'on a choisi. Ou de réaliser une projection conique, pour laquelle toute l'image sera nette.

Adieu le flou : on prend la photo, puis on choisit là où on veut qu'elle soit nette ! En revanche, la résolution spatiale, donnée par le nombre de macropixels, est plus faible qu'en photographie numérique classique, puisque chacun est constitué de plusieurs pixels.

Aujourd'hui, plusieurs entreprises commercialisent des appareils photo plénoptiques. Les puristes regrettent la perte de définition, mais les performances s'améliorent et la Société allemande *Raytrix* annonce une résolution apparente variant entre un et trois mégapixels. La netteté partout, pour des images classiques ainsi que pour des images en trois dimensions, est ainsi à notre portée. Le rêve de Lippmann commence à se réaliser.

XIX^{es} OLYMPIADES DE PHYSIQUE FRANCE

QUAND LES LYCÉENS DEVIENNENT CHERCHEURS

Inscrivez-vous sur www.odpf.org



POURQUOI PAS VOUS ?

Organisées par :



Les inscriptions à l'édition 2011/2012 des Olympiades de Physique France sont ouvertes

Vous encadrez ou avez encadré pour un TPE ou un Atelier scientifique un groupe de lycéens motivés et enthousiastes, poursuivez l'aventure en inscrivant cette équipe aux XIX^{es} Olympiades de Physique France.

Cette participation permettra à vos élèves de mettre en valeur leur travail et de partager leur intérêt avec d'autres passionnés de sciences et de physique.

Les Olympiades sont aussi l'occasion de promouvoir les sciences expérimentales dans votre établissement et auprès des nouveaux lycéens.

Informations et inscriptions :
<http://www.odpf.org>

Cloture des inscriptions : **30 octobre 2011**

Sélections régionales : **7 décembre 2011**

Finale et exposition des projets au Palais de la Découverte : **27-28 janvier 2012**

Les Olympiades de Physique France sont organisées par l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie et la Société Française de Physique.



La librairie **POUR LA SCIENCE**

Sélection spéciale « mathématiciens »



VIENT DE
PARAÎTRE

Galois ■ Norbert Verdier

Dès son plus jeune âge, la vie d'Évariste Galois (1811-1832) est marquée par une passion démesurée pour les mathématiques. Ses travaux, incompris à son époque, marquent le début de la théorie des groupes et irriguent aujourd'hui de nombreux champs des mathématiques.

144 pages • 18 euros • ISBN 978-2-8424-5112-7

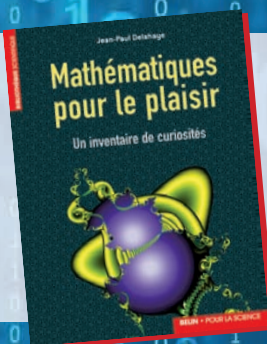


NOUVELLE
ÉDITION
ENRICHIE

Les mathématiciens ■ Collectif

« Nul ne peut être mathématicien s'il n'a une âme de poète », disait Sophie Kowalevskaja. D'Archimède à Jacques Hadamard, cet ouvrage dresse les portraits d'une vingtaine de mathématiciens, autant artistes que scientifiques.

280 pages • 24 euros • ISBN 978-2-8424-5109-7



Mathématiques pour le plaisir ■ Jean-Paul Delahaye

Les mathématiques ne se réduisent pas – heureusement – à ce qu'on nous en apprend à l'école. Partout présentes, elles sont une source de joie et d'épanouissement pour celui qui sait y consacrer un peu d'attention et d'esprit ludique. Dans cet ouvrage, découvrez pourquoi les mathématiques sont faciles et comment s'y adonner est un plaisir.

208 pages • 25 euros • ISBN 978-2-8424-5104-2



Au nom de l'infini ■ Jean-Michel Kantor, Loren Graham

Les auteurs retracent un épisode fascinant et dramatique de la création mathématique. Sur les traces de chercheurs russes et français du XX^e siècle, ils nous éclairent sur les liens étroits entre science, religion et politique.

288 pages • 24 euros • ISBN 978-2-8424-5107-3

Des livres à découvrir en librairie et sur www.pourlascience.fr