

*Les erreurs de nos jugements spontanés sont parfois étonnantes.
Le hasard créé par les lancers d'une pièce de monnaie en est l'exemple
le plus frappant : tout y semble paradoxal.*

Jean-Paul DELAHAYE

Raisonnement A. Considérons deux tirages successifs d'une pièce de monnaie; il y a autant de chances d'obtenir PF que FF, et cette probabilité est $(1/2)^2 = 1/4$. Les deux séquences PF et FF étant équiprobables, chacune a la même probabilité de sortir en premier, et la probabilité que PF survienne avant FF est donc $1/2$. Les deux séquences mises en compétition partant sur des bases égales, si l'on nous pro-

Si votre doute persiste, opérez un contrôle expérimental avec une pièce de monnaie, en programmant une simulation avec votre ordinateur ou encore en associant P aux décimales impaires de π et F aux décimales paires (voir la série illustrée ci-dessus et ci-contre). Dans ce dernier cas, vous pouvez commencer la série

avec 3, avec 1, avec 4, etc. J'avoue avoir fait un tel test pour m'assurer que, lors d'une longue série de tirages, le nombre moyen de FF est le même que le nombre moyen de PF, ce que je n'arrivais pas à considérer comme compatible avec la probabilité de gain de $3/4$ en faveur de PF. Le test a bien évidemment donné le résultat décrit par la théorie, pour la fréquence égale de PF et de FF, et celui du raisonnement B, pour le $3/4$ en faveur de PF dans une compétition.

Le petit calcul énumératif suivant ne constitue pas une preuve (elle est dans le raisonnement B !), mais il vous aidera sans ordinateur à accepter l'étrange compatibilité entre les diverses affirmations que nous avons formulées. Considérons les 16 séquences possibles et équiprobables qu'on obtient en opérant quatre tirages : PPPP-PPPF-PPFF-PPFF-PFPP-PFPF-PFFP-PFFF-FPPP-FPPF-FPFP-FPFF-FFPP-FFPF-FFFP-FFFF.

La séquence FF est présente 12 fois comme la séquence PF ; il y a donc bien égalité des fréquences, et FF (ainsi que PF) apparaît dans un quart des 48 couples obtenus avec les 16 tirages de longueur 4. Entre FF et PF, quelle séquence arrive en premier ? On constate que PF gagne 10 fois (en vert) alors que FF ne gagne que 4 fois (en rouge). Dans deux cas (PPPP et FPPP), aucune séquence n'a gagné et les tirages doivent donc se poursuivre ; PF gagnera alors nécessairement, puisque les deux séquences indéterminées se terminent par un P, ce qui interdit mécaniquement à FF d'apparaître avant PF. Au total, on trouve donc que PF gagne exactement trois fois sur quatre.

Si l'on envisage les autres compétitions entre séquences de longueur 2, les résultats, faciles à établir (car résultant de symétrie ou se ramenant à la compétition FF contre PF), sont les suivants :

PP gagne contre PF avec une probabilité $1/2$,
PP gagne contre FP avec une probabilité $1/4$,
PP gagne contre FF avec une probabilité $1/2$,

PF gagne contre FP avec une probabilité $1/2$,
PF gagne contre FF avec une probabilité $3/4$,
FP gagne contre FF avec une probabilité $1/2$.

Le temps moyen d'attente

Malheureusement, les cas particuliers que nous venons d'envisager ne nous permettent pas de savoir ce qui se passe quand on oppose deux séquences quelconques, par exemple PFP et FFF. La notion de temps moyen d'attente devrait nous aider. Une séquence S étant fixée, on nomme temps moyen d'attente de S le nombre moyen de fois qu'il faut lancer la pièce pour que S se présente. Par exemple, le temps moyen d'attente de P (ou de F) est 2 (voir l'encadré 1).

Deux séquences S et S' de longueur k ont la même probabilité de se produire quand on lance k fois la pièce ; elles apparaissent donc avec la même fréquence quand on lance indéfiniment la pièce. On est tenté d'en déduire que les temps moyens d'attente de S et de S' sont égaux. Pourtant, comme dans le cas des compétitions entre deux séquences, ce serait une erreur : le temps moyen d'attente de FF est 6, alors que le temps moyen d'attente de PF est 4.

Cette surprise va cependant dans le même sens que la précédente, quand nous opposons FF à PF. Puisque FF apparaît en moyenne plus tardivement dans une suite de lancers que PF, il semble assez naturel que FF se fasse battre par PF quand on cherche à savoir laquelle arrive le plus souvent en premier. Peut-on déduire le $3/4$ de tout à l'heure en faveur de PF, des temps d'attente moyens 6 et 4 ? Cela ne semble pas bien clair et si nous voulions chercher une règle nous ne la trouverions jamais : ici encore, un phénomène inattendu contrarie notre intuition et rend illusoire la déduction du $3/4$ à partir des temps d'attente moyens. En effet, il se peut très bien que le temps d'attente

moyen d'une séquence S_1 soit plus long que le temps d'attente d'une séquence S_2 et que, pourtant, dans une compétition entre S_1 et S_2 , la séquence S_1 se présente plus souvent avant S_2 que l'inverse.

L'exemple le plus simple d'une telle situation paradoxale est donné par les deux séquences $S_1 = \text{PFPF}$ et $S_2 = \text{FPFF}$. La séquence S_1 a un temps d'attente de 20, alors que S_2 a un temps d'attente de 18. Pourtant, S_1 arrive devant S_2 avec une probabilité égale à $9/14$, soit 0,6428.

Les trois notions « fréquence d'apparition », « temps moyen d'attente » et « gagnant d'une compétition entre deux séquences », que nous lions intuitivement quand nous comparons deux séquences, sont en réalité indépendantes !

Intransitivité

Résumons la situation multiparadoxale à laquelle nous sommes parvenus :

(a) Deux séquences de longueur égale ont la même probabilité de survenir en un emplacement donné d'une suite infinie de tirages ; leurs fréquences moyennes d'apparition sont donc les mêmes.

Pourtant :

(b) Il se peut que l'une d'elles survienne plus souvent avant l'autre dans une compétition entre elles.

(c) Il se peut qu'elles aient des temps d'attente différents.

De plus, et cela paraît un comble :

(d) Il est possible que celle qui arrive statistiquement le plus tardivement soit, en moyenne, plus souvent devant l'autre quand on les fait concourir l'une contre l'autre.

Les comportements contre-intuitifs des suites de tirages à pile ou face vont encore plus loin :

(e) Une séquence plus courte peut perdre dans une compétition qui l'oppose à une séquence plus longue ; tel est le cas quand

