

avec 3, avec 1, avec 4, etc. J'avoue avoir fait un tel test pour m'assurer que, lors d'une longue série de tirages, le nombre moyen de FF est le même que le nombre moyen de PF, ce que je n'arrivais pas à considérer comme compatible avec la probabilité de gain de 3/4 en faveur de PF. Le test a bien évidemment donné le résultat décrit par la théorie, pour la fréquence égale de PF et de FF, et celui du raisonnement B, pour le 3/4 en faveur de PF dans une compétition.

Le petit calcul énumératif suivant ne constitue pas une preuve (elle est dans le raisonnement B !), mais il vous aidera sans ordinateur à accepter l'étrange compatibilité entre les diverses affirmations que nous avons formulées. Considérons les 16 séquences possibles et équiprobables qu'on obtient en opérant quatre tirages : PPPP-PPPF-PPFP-PFFP-PFPP-PFPP-PFFF-FPPP-FPPF-FPPP-FPFF-FPPP-FPFF-FFFF-FFFF.

La séquence FF est présente 12 fois comme la séquence PF ; il y a donc bien égalité des fréquences, et FF (ainsi que PF) apparaît dans un quart des 48 couples obtenus avec les 16 tirages de longueur 4. Entre FF et PF, quelle séquence arrive en premier ? On constate que PF gagne 10 fois (*en vert*) alors que FF ne gagne que 4 fois (*en rouge*). Dans deux cas (PPPP et FPPP), aucune séquence n'a gagné et les tirages doivent donc se poursuivre ; PF gagnera alors nécessairement, puisque les deux séquences indéterminées se terminent par un P, ce qui interdit mécaniquement à FF d'apparaître avant PF. Au total, on trouve donc que PF gagne exactement trois fois sur quatre.

Si l'on envisage les autres compétitions entre séquences de longueur 2, les résultats, faciles à établir (car résultant de symétrie ou se ramenant à la compétition FF contre PF), sont les suivants :

PP gagne contre PF avec une probabilité 1/2, PP gagne contre FP avec une probabilité 1/4, PP gagne contre FF avec une probabilité 1/2,

PF gagne contre FP avec une probabilité 1/2, PF gagne contre FF avec une probabilité 3/4, FP gagne contre FF avec une probabilité 1/2.

Le temps moyen d'attente

Malheureusement, les cas particuliers que nous venons d'envisager ne nous permettent pas de savoir ce qui se passe quand on oppose deux séquences quelconques, par exemple PFP et FFF. La notion de temps moyen d'attente devrait nous aider. Une séquence S étant fixée, on nomme temps moyen d'attente de S le nombre moyen de fois qu'il faut lancer la pièce pour que S se présente. Par exemple, le temps moyen d'attente de P (ou de F) est 2 (*voir l'encadré 1*).

Deux séquences S et S' de longueur k ont la même probabilité de se produire quand on lance k fois la pièce ; elles apparaissent donc avec la même fréquence quand on lance indéfiniment la pièce. On est tenté d'en déduire que les temps moyens d'attente de S et de S' sont égaux. Pourtant, comme dans le cas des compétitions entre deux séquences, ce serait une erreur : le temps moyen d'attente de FF est 6, alors que le temps moyen d'attente de PF est 4.

Cette surprise va cependant dans le même sens que la précédente, quand nous opposons FF à PF. Puisque FF apparaît en moyenne plus tardivement dans une suite de lancers que PF, il semble assez naturel que FF se fasse battre par PF quand on cherche à savoir laquelle arrive le plus souvent en premier. Peut-on déduire le 3/4 de tout à l'heure en faveur de PF, des temps d'attente moyens 6 et 4 ? Cela ne semble pas bien clair et si nous voulions chercher une règle nous ne la trouverions jamais : ici encore, un phénomène inattendu contrarie notre intuition et rend illusoire la déduction du 3/4 à partir des temps d'attente moyens. En effet, il se peut très bien que le temps d'attente

moyen d'une séquence S_1 soit plus long que le temps d'attente d'une séquence S_2 et que, pourtant, dans une compétition entre S_1 et S_2 , la séquence S_1 se présente plus souvent avant S_2 que l'inverse.

L'exemple le plus simple d'une telle situation paradoxale est donné par les deux séquences $S_1 = PFPF$ et $S_2 = FPFF$. La séquence S_1 a un temps d'attente de 20, alors que S_2 a un temps d'attente de 18. Pourtant, S_1 arrive devant S_2 avec une probabilité égale à 9/14, soit 0,6428.

Les trois notions « fréquence d'apparition », « temps moyen d'attente » et « gagnant d'une compétition entre deux séquences », que nous lions intuitivement quand nous comparons deux séquences, sont en réalité indépendantes !

Intransitivité

Résumons la situation multiparadoxale à laquelle nous sommes parvenus :

(a) Deux séquences de longueur égale ont la même probabilité de survenir en un emplacement donné d'une suite infinie de tirages ; leurs fréquences moyennes d'apparition sont donc les mêmes.

Pourtant :

(b) Il se peut que l'une d'elles survienne plus souvent avant l'autre dans une compétition entre elles.

(c) Il se peut qu'elles aient des temps d'attente différents.

De plus, et cela paraît un comble :

(d) Il est possible que celle qui arrive statistiquement le plus tardivement soit, en moyenne, plus souvent devant l'autre quand on les fait concourir l'une contre l'autre.

Les comportements contre-intuitifs des suites de tirages à pile ou face vont encore plus loin :

(e) Une séquence plus courte peut perdre dans une compétition qui l'oppose à une séquence plus longue ; tel est le cas quand



1. Surprise pour le temps moyen d'attente

Quand on lance deux fois une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir FF est la même que la probabilité d'obtenir PF et vaut $1/4$. En lançant indéfiniment la pièce, la fréquence d'apparition de FF sera $1/4$, de même que pour PF. On est tenté d'en déduire que, quand on lance une pièce de monnaie indéfiniment, on attend en moyenne autant de temps pour obtenir FF que PF. C'est faux : le temps moyen d'attente de FF est de six lancers alors que le temps moyen d'attente de PF est de quatre lancers. Cela choque l'intuition et paraît même impossible !



Pour se persuader de l'exactitude de nos affirmations, on peut mener une vérification expérimentale, ou raisonner.

Exemple 1. Le temps d'attente moyen de la séquence P (une fois pile) est 2. En effet :
 – Une fois sur deux, on obtient P dès le premier tirage (temps d'attente égal à 1). Dans la moyenne, on a donc 1 avec un poids $1/2$.
 – Une fois sur quatre, on a le début FP, et le temps d'attente a donc été 2. Dans la moyenne, on a 2 avec un poids $1/4$.
 – Une fois sur huit, on a le début FFP. Dans la moyenne, on a donc 3 avec un poids $1/8$; etc.

Le temps d'attente moyen de P est la somme de la série :

$$\begin{aligned} & 1/2 + 2 \times 1/4 + 3 \times 1/8 + 4 \times 1/16 + \dots \text{ Cette série se calcule à partir de la série géométrique classique } 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1. \\ & 1/2 + 2 \times 1/4 + 3 \times 1/8 + 4 \times 1/16 + \dots = \\ & \begin{array}{r} 1/2 + \quad 1/4 + \quad 1/8 + \quad 1/16 + \dots \\ + \quad 1/4 + \quad 1/8 + \quad 1/16 + \dots \\ + \quad \quad 1/8 + \quad 1/16 + \dots \\ + \quad \quad \quad 1/16 + \dots \end{array} \end{aligned}$$

La première ligne vaut 1, la deuxième $1/2$ (c'est la première divisée par 2), la troisième $1/4$ (c'est la première divisée par 4), etc. Le tout vaut ainsi $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$.

Exemple 2. Calculons maintenant le temps moyen d'attente T de la séquence FF. En envisageant les deux possibilités pour le premier tirage, on a :

$T = 1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F}) + 1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné P})$.

Le temps moyen d'attente de FF quand le premier tirage a donné P est bien sûr une unité de plus que le temps moyen d'attente de FF, car quand on a obtenu P en premier, on a perdu un coup : le P obtenu ne sert à rien et ne servira pas. Le second terme de la somme est donc $1/2 \times (1 + T)$.

Pour le premier terme, on écrit que le temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F est égal à $1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F et le second a donné F}) + 1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F et le second P})$.

La première grande parenthèse vaut évidemment 2. Quant à la seconde, en raisonnant comme précédemment, on voit qu'elle vaut $(2 + T)$. En regroupant ce que nous venons d'obtenir, on a : $T = 1/2 \times [1/2 \times 2 + 1/2 \times (2 + T)] + 1/2 \times (1 + T)$, ce qui, après résolution, donne $T = 6$.

Exemple 3. Par la même méthode, en utilisant le résultat de l'exemple 1, on obtient que le temps d'attente moyen T' de PF vérifie :

$T' = 1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de PF si le premier tirage a donné P}) + 1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de PF si le premier tirage a donné F}) = 1/2 \times (1 + \text{temps moyen d'attente de F}) + 1/2 \times (1 + T') = 1/2 \times (1 + 2) + 1/2 \times T'$. On en déduit que $T' = 4$.

on oppose PPP et FFPP, car la seconde gagne avec une probabilité $7/12$.

(f) Des séquences peuvent avoir des chances égales de gagner dans une compétition à quatre (25 % de chance chacune) et pourtant, dans des compétitions deux à deux, être toujours inégales.

Ainsi, les séquences PPF, PFF, FPP et FFP gagnent chacune dans 25 % des cas quand on les fait concourir toutes les quatre ensemble, mais ne font jamais jeu égal quand on les oppose deux à deux.

(g) Il se peut que dans des compétitions deux à deux, on obtienne des cycles du type $[S_1 \text{ bat } S_2, S_2 \text{ bat } S_3, \dots, S_{n-1} \text{ bat } S_n, \text{ mais } S_n \text{ bat } S_1]$. Un tel cycle est obtenu avec les quatre séquences PPF, PFF, FFP et FPP (voir l'encadré 3) :

PPF bat PFF avec une probabilité $2/3$,
 PFF bat FFP avec une probabilité $3/4$,
 FFP bat FPP avec une probabilité $2/3$,
 FPP bat PPF avec une probabilité $3/4$.

Corriger les fausses simplicités

Nous avons donc affaire à un paradoxe de non-transitivité : l'intuition nous souffle que chaque séquence possède une force propre qui lui permet de se présenter en tête devant une autre séquence et que, donc, si S_1 est plus forte que S_2 et S_2 plus forte que S_3 , alors nécessairement S_1 est plus forte que S_3 . C'est une illusion, car une séquence peut être « forte » devant une deuxième et « faible » devant une troisième. En sport

et dans les problèmes d'élection, de telles situations se produisent aussi.

Les encadrés expliquent comment mener les calculs qui vous permettront de vérifier ce qui vient d'être affirmé. L'examen attentif de ces méthodes affine notre compréhension et corrige nos jugements spontanés, dont l'inadéquation est flagrante. En relisant le raisonnement B présenté plus haut et en le comprenant, on finit par accepter que PF gagne contre FF et que, finalement... cela n'aurait pas dû nous étonner. De même, la méthode des graphes d'états (voir l'encadré 2) conduit à saisir clairement pourquoi PPF bat par exemple PFF. Plus généralement, elle permet de visualiser le rapport de force entre séquences et de comprendre (et calculer) que ce rapport se