

1. Surprise pour le temps moyen d'attente

Quand on lance deux fois une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir FF est la même que la probabilité d'obtenir PF et vaut $1/4$. En lançant indéfiniment la pièce, la fréquence d'apparition de FF sera $1/4$, de même que pour PF. On est tenté d'en déduire que, quand on lance une pièce de monnaie indéfiniment, on attend en moyenne autant de temps pour obtenir FF que PF. C'est faux : le temps moyen d'attente de FF est de six lancers alors que le temps moyen d'attente de PF est de quatre lancers. Cela choque l'intuition et paraît même impossible !



Pour se persuader de l'exactitude de nos affirmations, on peut mener une vérification expérimentale, ou raisonner.

Exemple 1. Le temps d'attente moyen de la séquence P (une fois pile) est 2. En effet :

– Une fois sur deux, on obtient P dès le premier tirage (temps d'attente égal à 1). Dans la moyenne, on a donc 1 avec un poids $1/2$.

– Une fois sur quatre, on a le début FP, et le temps d'attente a donc été 2. Dans la moyenne, on a 2 avec un poids $1/4$.

– Une fois sur huit, on a le début FFP. Dans la moyenne, on a donc 3 avec un poids $1/8$; etc.

Le temps d'attente moyen de P est la somme de la série :

$$\begin{aligned} & 1/2 + 2 \times 1/4 + 3 \times 1/8 + 4 \times 1/16 + \dots \\ & \text{Cette série se calcule à partir de la série géométrique classique } 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1. \\ & 1/2 + 2 \times 1/4 + 3 \times 1/8 + 4 \times 1/16 + \dots = \\ & 1/2 + \quad 1/4 + \quad 1/8 + \quad 1/16 + \dots \\ & \quad + \quad 1/4 + \quad 1/8 + \quad 1/16 + \dots \\ & \quad \quad + \quad 1/8 + \quad 1/16 + \dots \\ & \quad \quad \quad + \quad 1/16 + \dots \end{aligned}$$

La première ligne vaut 1, la deuxième $1/2$ (c'est la première divisée par 2), la troisième $1/4$ (c'est la première divisée par 4), etc. Le tout vaut ainsi $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$.

Exemple 2. Calculons maintenant le temps moyen d'attente T de la séquence FF. En envisageant les deux possibilités pour le premier tirage, on a :

$T = 1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F}) + 1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné P}).$

Le temps moyen d'attente de FF quand le premier tirage a donné P est bien sûr une unité de plus que le temps moyen d'attente de FF, car quand on a obtenu P en premier, on a perdu un coup : le P obtenu ne sert à rien et ne servira pas. Le second terme de la somme est donc $1/2 \times (1 + T)$.

Pour le premier terme, on écrit que le temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F est égal à $1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F et le second a donné F}) + 1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F et le second P}).$

La première grande parenthèse vaut évidemment 2. Quant à la seconde, en raisonnant comme précédemment, on voit qu'elle vaut $(2 + T)$. En regroupant ce que nous venons d'obtenir, on a : $T = 1/2 \times [1/2 \times 2 + 1/2 \times (2 + T)] + 1/2 \times (1 + T)$, ce qui, après résolution, donne $T = 6$.

Exemple 3. Par la même méthode, en utilisant le résultat de l'exemple 1, on obtient que le temps d'attente moyen T' de PF vérifie :

$T' = 1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de PF si le premier tirage a donné P}) + 1/2 \times (\text{temps moyen d'attente de PF si le premier tirage a donné F}) = 1/2 \times (1 + \text{temps moyen d'attente de F}) + 1/2 \times (1 + T') = 1/2 \times (1 + 2) + 1/2 \times T'$. On en déduit que $T' = 4$.

on oppose PPP et FFPP, car la seconde gagne avec une probabilité $7/12$.

(f) Des séquences peuvent avoir des chances égales de gagner dans une compétition à quatre (25 % de chance chacune) et pourtant, dans des compétitions deux à deux, être toujours inégales.

Ainsi, les séquences PPF, PFF, FPP et FFP gagnent chacune dans 25 % des cas quand on les fait concourir toutes les quatre ensemble, mais ne font jamais jeu égal quand on les oppose deux à deux.

(g) Il se peut que dans des compétitions deux à deux, on obtienne des cycles du type $[S_1 \text{ bat } S_2, S_2 \text{ bat } S_3, \dots, S_{n-1} \text{ bat } S_n, \text{ mais } S_n \text{ bat } S_1]$. Un tel cycle est obtenu avec les quatre séquences PPF, PFF, FFP et FPP (voir l'encadré 3) :

PPF bat PFF avec une probabilité $2/3$,
PFF bat FFP avec une probabilité $3/4$,
FFP bat PPF avec une probabilité $2/3$,
PPF bat PFF avec une probabilité $3/4$.

Corriger les fausses simplicités

Nous avons donc affaire à un paradoxe de non-transitivité : l'intuition nous souffle que chaque séquence possède une force propre qui lui permet de se présenter en tête devant une autre séquence et que, donc, si S_1 est plus forte que S_2 et S_2 plus forte que S_3 , alors nécessairement S_1 est plus forte que S_3 . C'est une illusion, car une séquence peut être « forte » devant une deuxième et « faible » devant une troisième. En sport

et dans les problèmes d'élection, de telles situations se produisent aussi.

Les encadrés expliquent comment mener les calculs qui vous permettront de vérifier ce qui vient d'être affirmé. L'examen attentif de ces méthodes affine notre compréhension et corrige nos jugements spontanés, dont l'inadéquation est flagrante. En relisant le raisonnement B présenté plus haut et en le comprenant, on finit par accepter que PF gagne contre FF et que, finalement... cela n'aurait pas dû nous étonner. De même, la méthode des graphes d'états (voir l'encadré 2) conduit à saisir clairement pourquoi PPF bat par exemple PFF. Plus généralement, elle permet de visualiser le rapport de force entre séquences et de comprendre (et calculer) que ce rapport se