



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

construit à partir de la structure des deux séquences, et qu'il n'y a pas de force propre à une séquence indépendante des compétitions à laquelle on la soumet.

Connaître la fréquence de survenue d'une séquence  $S_1$  et son temps moyen d'attente ne suffit pas pour prédire sa force quand elle sera confrontée une autre séquence  $S_2$ , car cette force se décide face à  $S_2$  et est spécifique de la compétition particulière  $S_1$  contre  $S_2$ , contrairement à ce que notre jugement premier nous faisait croire. L'explication de l'inadéquation de nos appréciations spontanées est sans doute à rechercher dans l'expérience que nous avons des nombreuses situations où la force d'un concurrent dans

une compétition provient d'une aptitude qu'il possède en propre (par exemple, en course à pied, son aptitude à aller vite) et qui n'est pas liée aux adversaires qu'il affronte.

Mener le calcul pour savoir qui gagne est un travail délicat par la méthode des graphes d'états. Peut-on arriver au résultat plus rapidement ? Un algorithme miraculeux de John Conway détermine le temps moyen d'attente d'une séquence et la probabilité de gagner d'une séquence par rapport à une autre (voir l'encadré 4).

On ne comprend pas pourquoi l'algorithme de Conway, d'une simplicité déroutante, donne la bonne réponse ... comme bien d'autres résultats de J. Conway. Ce mathématicien n'a jamais publié la preuve que son algorithme calcule convenablement (cela ne signifie pas qu'il n'en connaissait pas). Des démonstrations ont été publiées, dont aucune n'est simple. Nous disposons, grâce au génie de J. Conway, d'un procédé assez rapide pour savoir qui gagne dans une compétition à deux et les temps moyens d'attente. Toutefois, à ma connaissance, il n'existe pas d'algorithme équivalent pour savoir qui gagne dans une compétition entre trois séquences ou plus.

## Choisir à tour de rôle

Avec les suites de P ou F, on peut jouer ou parier. La méthode consistant à proposer la séquence perdante (par exemple FF) alors que vous vous réservez la bonne (PF) risque de susciter la méfiance. Mieux vaut laisser choisir une séquence, puis choisir ensuite une autre séquence de même longueur qui vous fera gagner.

Comment, face à une séquence  $S$  donnée, déterminer une séquence qui batte  $S$  ? Un examen systématique de toutes les séquences et la comparaison de chaque possibilité avec l'algorithme de Conway donnerait le résultat. De tête, le calcul serait compliqué, voire impossible, si le premier joueur a choisi une séquence de plus de dix piles ou faces. Apprendre par cœur le tableau des probabilités de gains (calculé à l'avance) n'est pas plus envisageable, même en se limitant aux séquences de taille inférieure à cinq. Comment s'y prendre ?

### 3. La non-transitivité de la relation de force

L'examen des quatre graphes d'états correspondant aux compétitions PPF-PFF, PFF-FFP, FFP-FPP et FPP-PFF indique qu'à chaque confrontation, la première séquence bat la seconde : nous avons donc un cycle paradoxal.

Le 2/3 en faveur de PPF contre PFF se justifie de la manière suivante en utilisant la méthode du graphe d'états. Au départ, on place 1 sur le nœud Rien. On suit ce que devient ce 1, lancer après lancer. Malgré la flèche du nœud Rien vers lui-même, toute la probabilité 1 se retrouve à la limite sur le nœud P. Celui-ci distribue 1/2 à PP qui finit par l'envoyer sur PPF. Le nœud P distribue aussi 1/2 à PF, qui envoie la moitié (c'est-

à-dire 1/4) à PFF. Le 1/4 que PF renvoie à P sera renvoyé pour moitié (1/8) à PP et pour moitié à PF, qui en enverra la moitié à PFF (1/16), etc. Le nœud PFF au total recevra donc  $1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots = 1/3$  (somme des termes d'une suite géométrique). Bien sûr tout le reste, c'est-à-dire 2/3, arrive sur PPF.

Le résultat 3/4 en faveur de PPF quand il est opposé à FFP est plus facile encore à justifier, puisque le nœud FF ne reçoit que 1/4 en tout.

Les deux autres graphes d'états sont identiques aux deux premiers à des changements de noms près, et donc se ramènent aux deux premiers. Le cycle est entièrement justifié.

