



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

construit à partir de la structure des deux séquences, et qu'il n'y a pas de force propre à une séquence indépendante des compétitions à laquelle on la soumet.

Connaître la fréquence de survenue d'une séquence S_1 et son temps moyen d'attente ne suffit pas pour prédire sa force quand elle sera confrontée une autre séquence S_2 , car cette force se décide face à S_2 et est spécifique de la compétition particulière S_1 contre S_2 , contrairement à ce que notre jugement premier nous faisait croire. L'explication de l'inadéquation de nos appréciations spontanées est sans doute à rechercher dans l'expérience que nous avons des nombreuses situations où la force d'un concurrent dans

une compétition provient d'une aptitude qu'il possède en propre (par exemple, en course à pied, son aptitude à aller vite) et qui n'est pas liée aux adversaires qu'il affronte.

Mener le calcul pour savoir qui gagne est un travail délicat par la méthode des graphes d'états. Peut-on arriver au résultat plus rapidement ? Un algorithme miraculeux de John Conway détermine le temps moyen d'attente d'une séquence et la probabilité de gagner d'une séquence par rapport à une autre (voir l'encadré 4).

On ne comprend pas pourquoi l'algorithme de Conway, d'une simplicité déroutante, donne la bonne réponse ... comme bien d'autres résultats de J. Conway. Ce mathématicien n'a jamais publié la preuve que son algorithme calcule convenablement (cela ne signifie pas qu'il n'en connaissait pas). Des démonstrations ont été publiées, dont aucune n'est simple. Nous disposons, grâce au génie de J. Conway, d'un procédé assez rapide pour savoir qui gagne dans une compétition à deux et les temps moyens d'attente. Toutefois, à ma connaissance, il n'existe pas d'algorithme équivalent pour savoir qui gagne dans une compétition entre trois séquences ou plus.

3. La non-transitivité de la relation de force

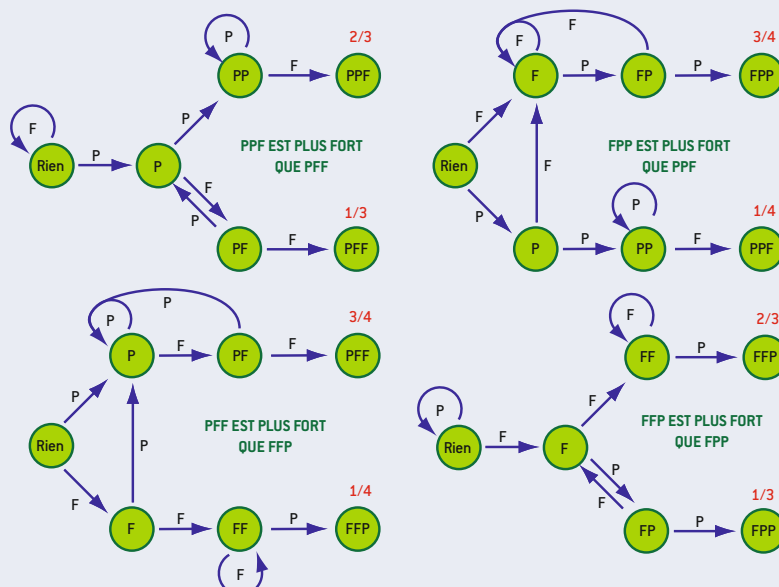
L'examen des quatre graphes d'états correspondant aux compétitions PPF-PFF, PFF-FFP, FFP-FPP et FPP-PFF indique qu'à chaque confrontation, la première séquence bat la seconde : nous avons donc un cycle paradoxal.

Le 2/3 en faveur de PPF contre PFF se justifie de la manière suivante en utilisant la méthode du graphe d'états. Au départ, on place 1 sur le nœud Rien. On suit ce que devient ce 1, lancer après lancer. Malgré la flèche du nœud Rien vers lui-même, toute la probabilité 1 se retrouve à la limite sur le nœud P. Celui-ci distribue 1/2 à PP qui finit par l'envoyer sur PPF. Le nœud P distribue aussi 1/2 à PF, qui envoie la moitié (c'est-

à-dire 1/4) à PFF. Le 1/4 que PF renvoie à P sera renvoyé pour moitié (1/8) à PP et pour moitié à PF, qui en enverra la moitié à PFF (1/16), etc. Le nœud PFF au total recevra donc $1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots = 1/3$ (somme des termes d'une suite géométrique). Bien sûr tout le reste, c'est-à-dire 2/3, arrive sur PPF.

Le résultat 3/4 en faveur de PPF quand il est opposé à FFP est plus facile encore à justifier, puisque le nœud FF ne reçoit que 1/4 en tout.

Les deux autres graphes d'états sont identiques aux deux premiers à des changements de noms près, et donc se ramènent aux deux premiers. Le cycle est entièrement justifié.



Choisir à tour de rôle

Avec les suites de P ou F, on peut jouer ou parier. La méthode consistant à proposer la séquence perdante (par exemple FF) alors que vous vous réservez la bonne (PF) risque de susciter la méfiance. Mieux vaut laisser choisir une séquence, puis choisir ensuite une autre séquence de même longueur qui vous fera gagner.

Comment, face à une séquence S donnée, déterminer une séquence qui batte S ? Un examen systématique de toutes les séquences et la comparaison de chaque possibilité avec l'algorithme de Conway donnerait le résultat. De tête, le calcul serait compliqué, voire impossible, si le premier joueur a choisi une séquence de plus de dix piles ou faces. Apprendre par cœur le tableau des probabilités de gains (calculé à l'avance) n'est pas plus envisageable, même en se limitant aux séquences de taille inférieure à cinq. Comment s'y prendre ?

4. L'algorithme magique de John Conway

John Conway a conçu un algorithme qui, sans utiliser la méthode des graphes d'états, indique le résultat des confrontations d'une séquence contre une autre et cela quelles que soient leurs complexités et leurs longueurs.

Considérons par exemple les séquences

A = PFPP et **B = PPFF**.

Plaçons A au-dessus de B :

A PFPP

B PPFF

Si les séquences coïncident, écrivons 1 sur les séquences; sinon, écrivons 0, comme c'est le cas ici :

0

A PFPP

B PPFF

Comparons maintenant les trois derniers symboles de la première séquence (FPP) avec les trois premiers de la seconde (PPF). Si ces sous-séquences coïncident, on ajoute un 1, sinon un 0 :

00

A PFPP

B PPFF

On compare les deux derniers symboles (PP) de

la première séquence avec les deux premiers de la seconde (PP), etc. Nous obtenons finalement :

0011 = 3

A PFPP

B PPFF

la suite de 0 et de 1 étant lue comme un entier en base 2. C'est la clef de A par rapport à B ; on la note Clef(A, B). Ici, Clef(A, B) = 3. Le rapport de la probabilité que B gagne sur la probabilité que A gagne est alors donné par :

$[\text{Clef}(A, A) - \text{Clef}(A, B)] / [\text{Clef}(B, B) - \text{Clef}(B, A)]$.

L'application de l'algorithme de Conway donne :

0011 = 3 1001 = 9 0000 = 0 1000 = 8

A PFPP

A PFPP

B PPFF

B PPFF

B PPFF

A PFPP

A PFPP

B PPFF

Clef(A, A) - Clef(A, B) = 6

Clef(B, B) - Clef(B, A) = 8.

Ainsi, B = PPFF gagne six fois quand A = PFPP gagne huit fois. Autrement dit, la probabilité de gain de A contre B est : $8/(6 + 8) = 4/7$.

Autre exemple : A = PFP, B = PPF.

001 = 1 101 = 5 010 = 2 100 = 4

A PFP

A PFP

B PPF

B PPF

B PPF

A PFP

A PFP

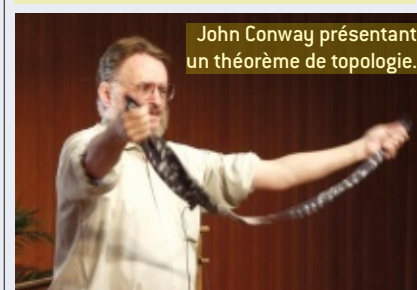
B PPF

$\text{Clef}(A, A) - \text{Clef}(A, B) = 4$
 $\text{Clef}(B, B) - \text{Clef}(B, A) = 2$.

Donc B = PPF gagne quatre fois quand A = PFP gagne deux fois. Dit autrement, la probabilité de gain de A contre B est : $2/(2 + 4) = 1/3$.

Le fait que cet algorithme fonctionne correctement est bien sûr difficile à démontrer, mais cela a été fait de plusieurs manières.

Autre miracle de l'algorithme de Conway : le nombre $2 \text{ Clef}(A, A)$ est le temps moyen d'attente de la séquence A. Cela permet de vérifier les résultats de l'encadré 1, qui indiquaient que le temps moyen d'attente de FF est 6 et que celui de PF est 4.



John Conway présentant un théorème de topologie.

Sous sa forme la plus générale, le problème n'a été résolu qu'en 2006 par Daniel Felix, de l'Université de Californie à San Diego. Cependant, la règle qu'il a trouvée (et qui vaut même si on remplace la pièce de monnaie par un dé à k faces) est trop complexe pour être décrite ici. Heureusement, la règle suivante, proposée par Mark Andrews en 2004, même si elle ne donne pas la meilleure probabilité de gain possible, marche très bien et s'applique de tête :

Face à une séquence S choisie par le premier joueur, prenez, pour le premier élément de votre séquence S', le deuxième élément de S en l'« inversant », puis faites suivre ce premier élément par la séquence S sans son dernier élément. Si par exemple votre adversaire choisit S = PPFPFPF, vous repérez le deuxième élément de sa séquence, P, vous l'« inversez » et obtenez F, que vous faites suivre de la suite de l'adversaire sans le dernier F, ce qui vous donne S' = FPPFPFP. L'algorithme de Conway indique que vous gagnerez alors avec une probabilité de $123/188 = 65,42\%$, soit presque $2/3$. Leonidas Guibas et Andrew Odlyzko ont établi que la

meilleure façon de répliquer au choix du premier joueur ne peut être que la séquence donnée par la méthode de M. Andrews, ou la même séquence dont le premier symbole est inversé. De plus, quelle que soit la façon dont joue le premier joueur, pour toute séquence de longueur au moins trois, il existe une façon de lui répliquer qui donne au second joueur une probabilité de gagner supérieure à $9/14 = 0,6428$.

Notre intuition des problèmes probabilistes est souvent dans l'erreur, car elle généralise de façon précipitée certaines règles habituellement valides, mais ayant des exceptions, comme celle indiquant que la force d'un joueur à un jeu est une propriété indépendante de l'adversaire. Notre intuition manque de finesse en confondant le gagnant d'une compétition entre deux séquences et la séquence ayant le plus court temps d'attente moyen. Le travail du mathématicien consiste alors à démêler la confusion qui résulte des fausses évidences du bon sens, et à montrer que là où l'on voyait un paradoxe ne règne en définitive qu'un peu de subtilité mathématique.

BIBLIOGRAPHIE

E. Pegg, *How to Win at Coin Flipping*, novembre 2010 : <http://blog.wolfram.com/2010/11/30/how-to-win-at-coin-flipping/>

R. Nickerson et P. Ante, *Counterintuitive probabilities in coin tossing*, *The UMAP Journal*, vol. 28, pp. 523-532, 2007.

D. Felix, *Optimal Penney Ante strategy via correlation polynomial identities*, *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 13-1, R35, 2006.

M. W. Andrews, *Anyone for a nontransitive paradox ? The case of Penney Ante*, prépublication, 2004 (m.andrews@ucl.ac.uk).

S. Collings, *Coin sequence probabilities and paradoxes*, *Bull. of the Inst. of Math. and its Applic.*, vol. 18, pp. 227-232, 1982.

L. Guibas et A. Odlyzko, *String overlaps, pattern matching, and nontransitive games*, *Journal of Combinatorial Theory*, vol. A30-2, pp. 183-208, 1981.