

4. L'algorithme magique de John Conway

John Conway a conçu un algorithme qui, sans utiliser la méthode des graphes d'états, indique le résultat des confrontations d'une séquence contre une autre et cela quelles que soient leurs complexités et leurs longueurs.

Considérons par exemple les séquences

$A = \text{PFPP}$ et $B = \text{PPFF}$.

Plaçons A au-dessus de B :

A PFPP

B PPFF

Si les séquences coïncident, écrivons 1 sur les séquences; sinon, écrivons 0, comme c'est le cas ici :

0

A PFPP

B PPFF

Comparons maintenant les trois derniers symboles de la première séquence (FPP) avec les trois premiers de la seconde (PPF). Si ces sous-séquences coïncident, on ajoute un 1, sinon un 0 :

00

A PFPP

B PPFF

On compare les deux derniers symboles (PP) de

la première séquence avec les deux premiers de la seconde (PP), etc. Nous obtenons finalement :

0011 = 3

A PFPP

B PPFF

la suite de 0 et de 1 étant lue comme un entier en base 2. C'est la clef de A par rapport à B ; on la note $\text{Clef}(A, B)$. Ici, $\text{Clef}(A, B) = 3$. Le rapport de la probabilité que B gagne sur la probabilité que A gagne est alors donné par :

$[\text{Clef}(A, A) - \text{Clef}(A, B)] / [\text{Clef}(B, B) - \text{Clef}(B, A)]$.

L'application de l'algorithme de Conway donne :

0011 = 3 1001 = 9 0000 = 0 1000 = 8

A PFPP

A PFPP

B PPFF

B PPFF

B PPFF

A PFPP

A PFPP

B PPFF

$\text{Clef}(A, A) - \text{Clef}(A, B) = 6$

$\text{Clef}(B, B) - \text{Clef}(B, A) = 8$.

Ainsi, $B = \text{PPFF}$ gagne six fois quand $A = \text{PFPP}$ gagne huit fois. Autrement dit, la probabilité de gain de A contre B est : $8/(6+8) = 4/7$

Autre exemple : $A = \text{PFP}$, $B = \text{PPF}$.

001 = 1 101 = 5 010 = 2 100 = 4

A PFP

A PFP

B PPF

B PPF

B PPF

A PFP

A PFP

B PPF

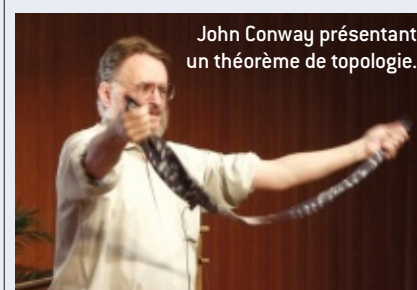
$\text{Clef}(A, A) - \text{Clef}(A, B) = 4$

$\text{Clef}(B, B) - \text{Clef}(B, A) = 2$.

Donc $B = \text{PPF}$ gagne quatre fois quand $A = \text{PFP}$ gagne deux fois. Dit autrement, la probabilité de gain de A contre B est : $2/(2+4) = 1/3$.

Le fait que cet algorithme fonctionne correctement est bien sûr difficile à démontrer, mais cela a été fait de plusieurs manières.

Autre miracle de l'algorithme de Conway : le nombre $2 \text{Clef}(A, A)$ est le temps moyen d'attente de la séquence A . Cela permet de vérifier les résultats de l'encadré 1, qui indiquaient que le temps moyen d'attente de FF est 6 et que celui de PF est 4.



John Conway présentant un théorème de topologie.

Sous sa forme la plus générale, le problème n'a été résolu qu'en 2006 par Daniel Felix, de l'Université de Californie à San Diego. Cependant, la règle qu'il a trouvée (et qui vaut même si on remplace la pièce de monnaie par un dé à k faces) est trop complexe pour être décrite ici. Heureusement, la règle suivante, proposée par Mark Andrews en 2004, même si elle ne donne pas la meilleure probabilité de gain possible, marche très bien et s'applique de tête :

Face à une séquence S choisie par le premier joueur, prenez, pour le premier élément de votre séquence S' , le deuxième élément de S en l'« inversant », puis faites suivre ce premier élément par la séquence S sans son dernier élément. Si par exemple votre adversaire choisit $S = \text{PPFPFPF}$, vous repérez le deuxième élément de sa séquence, P , vous l'« inversez » et obtenez F , que vous faites suivre de la suite de l'adversaire sans le dernier F , ce qui vous donne $S' = \text{FPFPFPF}$. L'algorithme de Conway indique que vous gagnerez alors avec une probabilité de $123/188=65,42$, soit presque $2/3$. Leonidas Guibas et Andrew Odlyzko ont établi que la

meilleure façon de répliquer au choix du premier joueur ne peut être que la séquence donnée par la méthode de M. Andrews, ou la même séquence dont le premier symbole est inversé. De plus, quelle que soit la façon dont joue le premier joueur, pour toute séquence de longueur au moins trois, il existe une façon de lui répliquer qui donne au second joueur une probabilité de gagner supérieure à $9/14 = 0,6428$.

Notre intuition des problèmes probabilistes est souvent dans l'erreur, car elle généralise de façon précipitée certaines règles habituellement valides, mais ayant des exceptions, comme celle indiquant que la force d'un joueur à un jeu est une propriété indépendante de l'adversaire. Notre intuition manque de finesse en confondant le gagnant d'une compétition entre deux séquences et la séquence ayant le plus court temps d'attente moyen. Le travail du mathématicien consiste alors à démêler la confusion qui résulte des fausses évidences du bon sens, et à montrer que là où l'on voyait un paradoxe ne règne en définitive qu'un peu de subtilité mathématique.

✓ BIBLIOGRAPHIE

E. Pegg, *How to Win at Coin Flipping*, novembre 2010 : <http://blog.wolfram.com/2010/11/30/how-to-win-at-coin-flipping/>

R. Nickerson et P. Ante, *Counterintuitive probabilities in coin tossing*, *The UMAP Journal*, vol. 28, pp. 523-532, 2007.

D. Felix, *Optimal Penney Ante strategy via correlation polynomial identities*, *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 13-1, R35, 2006.

M. W. Andrews, *Anyone for a nontransitive paradox ? The case of Penney Ante*, prépublication, 2004 (m.andrews@ucl.ac.uk).

S. Collings, *Coin sequence probabilities and paradoxes*, *Bull. of the Inst. of Math. and its Applic.*, vol. 18, pp. 227-232, 1982.

L. Guibas et A. Odlyzko, *String overlaps, pattern matching, and nontransitive games*, *Journal of Combinatorial Theory*, vol. A30-2, pp. 183-208, 1981.

IDÉES DE PHYSIQUE

Petite goutte deviendra grande

Pour devenir de la pluie, l'eau des nuages doit former des gouttes de taille millimétrique. Cette croissance, moins aisée qu'il n'y paraît, conjugue plusieurs phénomènes.

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

L'horizon dégagé se couvre brusquement, un cumulonimbus envahit le ciel et, une demi-heure plus tard, tombe une averse drue. Comment la vapeur d'eau de l'atmosphère a-t-elle pu se transformer en pluie en un si court laps de temps ? Ce processus apparemment simple nécessite l'enchaînement de plusieurs phénomènes physiques, de la naissance d'une gouttelette micrométrique jusqu'à ce que sa taille atteigne le millimètre. Pour comprendre comment un milliard de milliards de molécules d'eau se regroupent, prenons un peu d'air automnal humide et suivons-le dans son périple.

Une naissance délicate

Pour que de la pluie tombe, il faut d'abord que se forme un nuage, constitué d'un brouillard de fines gouttelettes d'eau. La condition nécessaire est que l'air ait une teneur en eau suffisante, c'est-à-dire qu'il soit sursaturé : il contient alors plus de vapeur d'eau qu'une valeur seuil, dépendant de la température. À 5 °C, cette quantité est de l'ordre de sept grammes par mètre cube. On dit alors que le degré d'hygrométrie atteint 100 pour cent. Mais cette condition n'est pas suffisante, car l'humidité peut dépasser cette valeur sans que ne se forme de nuage.

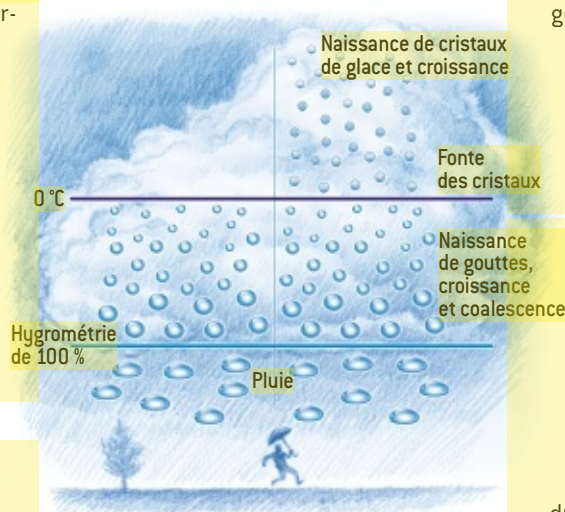
Pourquoi ? Tout d'abord, parce que lorsque les molécules d'eau sont peu nom-

breuses à s'être agrégées, l'énergie apportée par une molécule qui se colle à la gouttelette naissante chauffe souvent assez cette dernière pour qu'une autre molécule

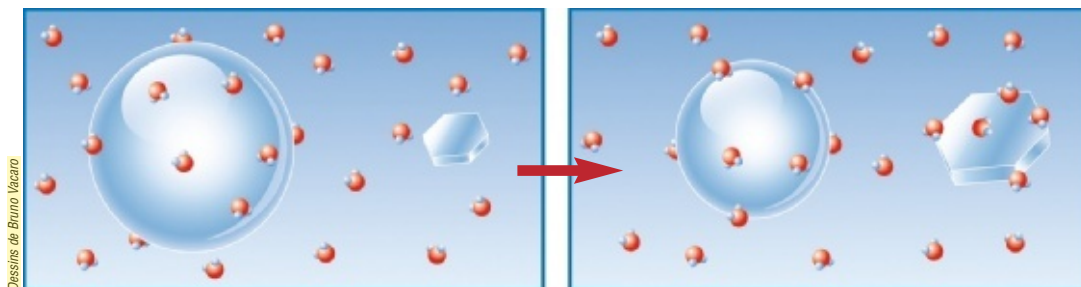
s'échappe ; dans une grosse goutte, cette énergie se répartit entre toutes les molécules présentes et a un effet relativement faible. Ensuite, parce que l'énergie qui maintient une molécule liée à une microgouttelette est d'autant plus faible que la goutte est petite ; il est plus aisé pour une molécule d'eau de s'échapper de l'attraction exercée par quelques-unes de ses semblables, que d'une gouttelette plus grosse.

Cela signifie que pour une teneur donnée en vapeur d'eau, il existe une taille critique pour laquelle les gouttelettes plus petites s'évaporent, tandis que les plus grosses vont continuer de grossir : c'est la taille pour laquelle le nombre de molécules d'eau qui s'échappent à chaque instant du noyau de condensation est égal au nombre de celles qui se condensent à partir de l'air environnant. Pour une humidité de 102 pour cent, les microgouttelettes sont stables dès que leur rayon dépasse 0,06 micromètre, ce qui correspond à quelques dizaines de millions de molécules.

Il est fort peu probable que les collisions aléatoires des molécules d'eau puissent engendrer un tel monstre à l'échelle moléculaire. Heureusement, l'atmosphère contient des particules solides ou liquides en suspension. Rapidement gorgées ou recouvertes d'eau, dont elles sont avides, elles jouent alors le rôle de noyau de condensation pour les molécules envi-



1. LA BASE D'UN NUAGE CORRESPOND à l'altitude à partir de laquelle l'air est en sursaturation (degré d'hygrométrie supérieur à 100 pour cent). Dans la partie basse du nuage, des gouttelettes naissent sur des noyaux de condensation et croissent très lentement. Quand leur taille est suffisante, elles tombent assez vite pour agglomérer au passage des gouttelettes plus petites, ce qui les fait grossir encore plus et tomber en pluie (à gauche sur le dessin). Dans la partie haute du nuage (à droite sur le dessin), où la température est inférieure à 0 °C, ce sont des cristaux de glace qui naissent et croissent aux dépens des gouttes par un effet dit Bergeron. Au-dessous de 0 °C, les cristaux fondent et deviennent de la pluie comme dans la situation précédente.



Dessins de Bruno Vacaro

2. L'EFFET BERGERON EXPLIQUE LA CONDENSATION plus rapide de la vapeur d'eau dans les nuages froids. Lorsque coexistent des gouttelettes et des cristaux, les molécules d'eau de la vapeur environnante sont plus fortement attirées

vers les cristaux que vers les gouttes. La croissance des cristaux se fait aux dépens des gouttes, dont l'évaporation s'accélère à mesure que diminue la teneur en vapeur d'eau environnante.

onnantes, avec une taille initiale qui est au moins celle de la particule, 0,1 à 1 micromètre typiquement. La gouttelette a ainsi la bonne taille pour se développer et son destin semble tout tracé : puisque la condensation l'emporte sur l'évaporation, elle va grossir petit à petit, gagner de la masse et chuter de plus en plus vite.

Une croissance beaucoup trop lente

Hélas, ce mécanisme de croissance se révèle trop lent. En effet, quand la vapeur se condense sur la goutte, il apparaît dans son voisinage un déficit d'eau qui n'est comblé que par la diffusion, vers la goutte, de molécules d'eau plus éloignées. Par ailleurs, la condensation s'accompagne d'une libération d'énergie au niveau de la goutte, énergie qui n'est évacuée que lentement, par diffusion de la chaleur dans l'air ambiant : la goutte reste souvent plus chaude que son environnement.

Ces deux effets ralentissent la croissance et le calcul montre que le rayon de la goutte croît, comme dans tous les processus de diffusion, à peu près comme la racine carrée du temps. Ainsi, à 0 °C, sous 0,9 atmosphère, une gouttelette de 0,75 micromètre met près de trois heures pour atteindre 20 micromètres de rayon ! Le rayon millimétrique est encore très loin...

Dans les nuages froids, à moins de 0 °C, un autre mécanisme accélère le processus. Au sein du nuage coexistent, au moins initialement, gouttes en surfusion et cristaux de glace, même pour des températures de -10 °C ou -20 °C. Toutefois, la glace étant un état ordonné de la matière, la cohésion entre molécules y est plus forte que dans l'eau liquide. Il est ainsi beaucoup plus difficile à une molécule d'eau de s'extraire d'un cristal de glace que d'une gouttelette. À taille égale, la concentration en vapeur d'eau pour laquelle il y a équilibre entre départs et arrivées de molécules est bien plus faible pour les cristaux que pour les gouttes ; à -12 °C, la différence atteint deux grammes par mètre cube.

Quelle est la conséquence ? Imaginons que la teneur initiale en vapeur soit élevée : les molécules d'eau se fixent aussi bien sur les gouttes que sur les cristaux, même si c'est plus rapidement sur ces derniers. En raison de ces dépôts, la teneur en vapeur diminue ensuite peu à peu jusqu'à passer sous la teneur critique pour les gouttes : dans ce cas, le liquide s'évapore. Toutefois, comme cette teneur en vapeur reste plus élevée que la teneur critique de la glace, la vapeur continue de se condenser sur les cristaux. La teneur en vapeur continuant à baisser, l'évaporation des gouttes s'accélère jusqu'à leur complète disparition. Les cristaux ont ainsi cannibalisé à distance les gouttes ! C'est l'effet Bergeron, du nom de Tor Bergeron, le météorologiste suédois qui l'a décrit en 1935.

L'effet Bergeron explique la croissance plus rapide des agrégats d'eau dans les nuages froids, mais il ne permet pas à lui seul de tout comprendre. Quel est l'ingrédient manquant ? La chute des gouttes ou

LES AUTEURS



Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK sont professeurs de physique à l'Université Pierre et Marie Curie, à Paris. Leur blog : <http://blog.idphys.fr>

BIBLIOGRAPHIE

B. J. Mason, *The Physics of Clouds*, Oxford University Press (2e édition, 1971), réimp. 2010.

SUR LE WEB

Site de Météo France : http://comprendre.meteofrance.com/pedagogique/pour_tous/

Retrouvez les articles de J.-M. Courty et E. Kierlik sur www.pourlascience.fr



Ligue
Européenne
Contre la
Maladie d'Alzheimer



APPEL A CANDIDATURE POUR DES BOURSES POUR LA RECHERCHE BIOMEDICALE ET CLINIQUE FONDAMENTALE SUR LA MALADIE D'ALZHEIMER

La Ligue Européenne Contre la Maladie d'Alzheimer (LECMA) octroie des bourses pour la recherche scientifique sur la maladie d'Alzheimer destinées aux scientifiques d'institutions et universités françaises.

Les demandes de **bourse standard** sont acceptées à concurrence de 80 000 € pour deux ans avec un maximum de 40 000 € par an.

Les demandes de **bourse pour des projets pilotes** par de jeunes chercheurs sont acceptées à concurrence de 40 000 € pour deux ans avec un maximum de 20 000 € par an. Seuls les chercheurs avec une thèse de Sciences achevée au plus tard en novembre 2011 et ayant un maximum de 6 ans d'expérience en recherche scientifique sont éligibles.

Les candidatures pour des projets franco-allemands et franco-hollandais peuvent être déposées par des chercheurs en France, en Allemagne ou aux Pays-Bas. La valeur ajoutée de ces projets coopératifs doit être significative dans le domaine de recherche proposé. Les dossiers de candidature peuvent être envoyés à LECMA ou aux associations partenaires allemande ou hollandaise.

Les subventions accordées seront mises à disposition à partir de novembre 2012.

La date limite d'envoi des lettres d'intention est le **14 mars 2012**. Elles doivent être rédigées en anglais et envoyées à : e.wiese@alzheimers-research.eu.

Un original et une copie doivent être envoyés à :
Ligue Européenne Contre la Maladie d'Alzheimer
94 rue La Fayette, 75010 Paris.

Des informations complémentaires et le formulaire de lettre d'intention sont accessibles sur :

www.maladiealzheimers.fr

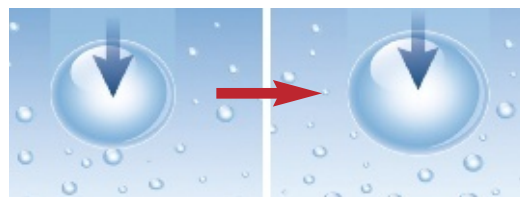
Pour toute question, merci de contacter le Dr Ellen Wiese, PhD (coordinatrice scientifique internationale) au :
+ 49-211-86-20-66-21

ou par email :

e.wiese@alzheimers-research.eu

Depuis sa création en 2005, LECMA a financé 21 programmes de recherche pour un montant total de plus de 1,2 million d'euros.

Regards



3. LA VITESSE DE CHUTE d'une goutte dépend de sa taille. Les gouttes plus grosses tombent plus vite que les petites. Comme plusieurs tailles coexistent initialement, les grosses gouttes d'eau amassent lors de leur chute des gouttelettes plus petites et augmentent ainsi rapidement de volume. C'est cet effet de cannibalisation qui explique la rapidité avec laquelle la pluie peut tomber après la formation d'un nuage.

des cristaux. À mesure que le rayon de la goutte augmente, sa masse et son poids croissent. Le frottement aérodynamique de la goutte avec l'air croît aussi, mais moins vite. Ainsi, plus la goutte est grosse, plus elle tombe vite : la vitesse est de 5 centimètres par seconde pour un rayon de 40 micromètres, de 4 mètres par seconde pour un rayon de un millimètre.

Une première conséquence est que l'on comprend dès lors pourquoi un nuage ne tombe pas. Pour des tailles micrométriques, les vitesses de chute sont très faibles : même en l'absence de vent ascendant, il faudrait six heures pour un nuage constitué de gouttes de 40 micromètres pour descendre de un kilomètre.

Les petites gouttes rattrapées par les grandes

Seconde conséquence : des gouttes de tailles différentes ne tombent pas ensemble. Les grosses gouttes rattrapent les petites, entrent en collision avec elles et grossissent en les cannibalisant. Pour que ce mécanisme soit efficace, il faut que les gouttelettes formées lors de la condensation initiale aient des tailles différentes : si toutes les gouttelettes se formaient et grossissaient au même rythme, elles tomberaient ensemble et ne pourraient pas fusionner !

Mais le hasard fait bien les choses. Toutes les étapes initiales résultent de processus aléatoires, ce qui conduit à une dispersion notable des rythmes de croissance, et donc des tailles. Après une phase initiale, lorsque les gouttes sont assez grosses pour tomber, quelques-unes, plus grosses que les autres, vont attraper les plus petites, et ce d'autant plus vite qu'elles grossissent. Ce mécanisme de coalescence devient dominant au-delà de 40 micromètres. C'est lui qui explique, *in fine*, que la pluie peut tomber une demi-heure après la formation d'un nuage.



La Transmission de patrimoine, moteur du progrès médical



Organisme indépendant, la Fondation pour la Recherche Médicale agit grâce à la générosité de plus de 400 000 donateurs.

Il existe plusieurs possibilités de soutenir la Fondation : en faisant un don, une donation, une donation temporaire d'usufruit, une succession, en souscrivant une assurance-vie en faveur de la Fondation... **Vous bénéficiez ainsi d'avantages fiscaux*.**

Depuis 64 ans, la Fondation pour la Recherche Médicale lutte contre toutes les pathologies, sans distinction.

En choisissant d'être à ses côtés vous agissez pour votre santé et celle de vos proches et vous jouez un rôle essentiel dans le maintien, en France, d'une recherche de très haut niveau.

*Pour les personnes assujetties à l'impôt de solidarité sur la fortune (ISF), réduction d'impôt de 75% du don dans la limite de 50 000 euros (loi Tépa). Hors ISF, la réduction d'impôt est de 66% du montant du don dans la limite de 20% du revenu imposable. Si les dons dépassent cette limite, l'excédent est reportable sur les 5 années suivantes.

Depuis sa création par le Pr Jean Bernard en 1947, la Fondation soutient la recherche médicale dans tous les domaines : cancers, maladies neurologiques, maladies infectieuses, maladies cardiovasculaires, maladies des os, maladies du système immunitaire, maladies du sang...

Son Conseil scientifique composé de 32 chercheurs de haut niveau, représentant toutes les disciplines médicales et scientifiques, sélectionne les projets qui seront soutenus.

Chaque année, la Fondation finance, en moyenne, plus de 750 recherches.

La Fondation s'engage à rendre compte de ses activités, met à disposition son rapport d'activité sur son site, envoie ses comptes à l'ensemble de ses donateurs. Ses comptes sont certifiés par un commissaire aux comptes indépendant.



La Fondation pour la Recherche Médicale est agréée par le Comité de la Charte du don en confiance et reconnue d'utilité publique.

**Pour plus
d'informations**

▶ Stéphanie Clément-Grandcourt
Responsable philanthropie
01 44 39 75 96 • stephanie.clement-grandcourt@frm.org

▶ Céline Ponchel-Pouvreau
Responsable libéralités et succession
01 44 39 75 67 • Celine.ponchel@frm.org

FONDATION POUR LA RECHERCHE MÉDICALE, 54 RUE DE VARENNE 75007 PARIS - www.frm.org

Coupon à retourner à **Fondation pour la Recherche Médicale**

- ☐ Je fais un don de.....
- ☐ Je souhaite recevoir, sous pli confidentiel, la brochure philanthropie
- ☐ Je souhaite recevoir, sous pli confidentiel, la brochure sur les legs, donations et assurances-vie

Ces demandes ne m'engagent en aucune façon.

Nom : Prénom :

Adresse : Code postal :

Ville : Téléphone :