

et mathématiques

XVII^e siècles. Le premier domaine concerné fut l'acoustique, avec Galilée et le père Marin Mersenne. En particulier, Galilée a relié le « nombre de vibrations » d'une corde à sa longueur, à sa masse et à sa tension, ainsi qu'au son plus ou moins aigu qu'elle produit. Quant à Mersenne, pionnier de l'acoustique, il fut le premier à évaluer la vitesse du son, dont il avait une conception ondulatoire.

La nature de la lumière a donné davantage de soucis aux physiciens. Malgré certaines de ses expériences qui s'interprètent plus facilement en termes d'ondes, Newton considérait la lumière comme un ensemble de corpuscules. D'autres savants, comme le jésuite Francisco Maria Grimaldi (1618-1663), défendaient une conception ondulatoire. Le débat s'est prolongé jusqu'au début du XVIII^e siècle, lorsque la balance a penché du côté de l'onde grâce notamment à la théorie proposée en 1815 par le physicien français Augustin Fresnel. Et en 1864, l'Écossais James Clerk Maxwell unifia en un seul ensemble d'équations (qui portent son nom) l'électricité, le magnétisme, l'in-

L'ESSENTIEL

✓ On rencontre les ondes partout dans la nature. Il s'agit généralement d'oscillations qui se propagent.

✓ Pour une onde évoluant dans un domaine clos, l'oscillation constitue l'aspect dominant. En régime linéaire, on peut la décrire à l'aide d'oscillations fondamentales nommées modes propres.

✓ Le comportement des ondes se complique beaucoup en présence d'effets non linéaires et du phénomène de « dispersion ».

duction électromagnétique et la théorie ondulatoire de la lumière – ce fut une étape cruciale du développement de la physique théorique.

Dans les équations de Maxwell, la vitesse de la lumière apparaît comme une constante absolue, indépendante de l'observateur et de ce fait contradictoire avec le principe de relativité de la physique galiléenne et newtonienne. C'est ce qui a conduit Einstein à sa théorie de la relativité restreinte, publiée en 1905. Par un curieux retour des choses, Einstein est aussi celui qui a montré clairement que l'énergie lumineuse est transportée par quantités bien définies, des « quanta » qu'on appela plus tard photons, ce qui représentait un retour – partiel – de la conception corpusculaire de la lumière. Et Einstein a participé à l'émergence de la physique quantique, où la notion d'onde intervient au niveau le plus fondamental.

Oscillation et propagation

Ce rapide survol de plus de trois siècles ne rend pas justice aux efforts des physiciens, aux débats qui les ont agités, aux découvertes intrigantes ou surprenantes qu'ils ont faites. Toujours est-il que les ondes ont occupé dans cette histoire une place de choix. Elles ont aussi grandement stimulé les mathématiciens. L'étude des ondes a en effet nécessité l'élaboration d'outils de plus en plus puissants et complexes, ce qui a contribué au développement des mathématiques depuis Newton et Leibniz jusqu'à nos jours. Je vais présenter ici certains de ces développements en relation avec les ondes, car ils aident à comprendre ce qu'est une onde et ce que ce concept a de si universel.

Qu'est-ce qu'une onde ? Il est difficile de donner une réponse univoque à cette question. On peut dire que le terme onde désigne la propagation, de proche en proche, d'une variation à laquelle est soumise une certaine grandeur physique. Par exemple, une onde à la surface de l'eau correspond à la propagation d'un changement de la hauteur de l'eau par rapport à sa hauteur d'équilibre. La variation qui se propage prend souvent la forme d'une oscillation, d'une vibration. De fait, l'oscillation et la propagation sont deux aspects complémentaires et pratiquement indissociables de la notion d'onde.

Pour comprendre ce qu'est une onde et comment on la décrit mathématiquement,

Daniel Palacios Jimenez



1. DANS CETTE INSTALLATION de l'artiste espagnol Daniel Palacios Jimenez [Berlin, 2006], une corde élastique est agitée à ses extrémités. Les ondes ainsi créées se propagent dans les deux sens et forment des ondes à peu près stationnaires, que perturbent les mouvements des spectateurs, captés par des caméras et transmis au mécanisme. Les variations des oscillations de la corde se traduisent aussi par des variations du son qu'elle produit. [Voir aussi la photographie page 22.]

commençons par la description d'une oscillation simple : l'oscillation de l'extrémité d'un ressort de part et d'autre de sa position d'équilibre (voir la figure 2). On suppose pour simplifier que le ressort, de masse négligeable, est posé sur un plan horizontal sans frottement, avec une masse m attachée à son extrémité. Désignons par $x(t)$ la position, qui dépend du temps t , de cette masse par rapport à la position d'équilibre. Si cet écart $x(t)$ est petit, alors la force de rappel du ressort vers la position d'équilibre est, en première approximation, proportionnelle à l'écart. Autrement dit, sa valeur algébrique est $-kx(t)$, où k est une constante positive appelée la raideur du ressort.

D'après la deuxième loi de Newton, la force appliquée à un mobile est égale au produit de sa masse par son accélération. Dans notre cas, cela s'écrit : $-kx(t) = m x''(t)$, où $x''(t)$ est la dérivée seconde de $x(t)$. En posant $\omega^2 = k/m$, on obtient que le mouvement de l'extrémité du ressort obéit à l'équation différentielle $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$.

On montre que cette équation élémentaire a pour solution générale :

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où a et b sont des constantes déterminées de façon unique par les conditions initiales, c'est-à-dire par la donnée de la position et de la vitesse du mobile à l'instant initial $t=0$ (ou à tout autre instant fixé). Cette solution est périodique, la période T étant égale à $2\pi/\omega$; la fréquence ν de l'oscillation est l'inverse de la période ($\nu = 1/T$), tandis que ω est la « pulsation » de l'oscillation, qui est proportionnelle à sa fréquence ($\omega = 2\pi\nu$). Elle est même sinusoïdale, puisque $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ s'écrit aussi sous la forme $A \cos(\omega t + \phi)$, où les constantes A et ϕ se calculent à partir de a et b .

On voit ainsi apparaître, dans ce modèle simple de l'oscillation du ressort, les fonctions périodiques élémentaires sinus et cosinus qui jouent un rôle fondamental dans la description des phénomènes ondulatoires. Une autre remarque importante est que le modèle mathématique du ressort s'applique à d'innombrables autres systèmes et est de ce fait très général ; on le nomme « oscillateur harmonique ».

Équations linéaires pour petites vibrations

En effet, toute oscillation de part et d'autre d'une valeur d'équilibre se décrit par une équation différentielle semblable à celle du ressort, à condition que les amplitudes de l'oscillation ne soient pas trop grandes. Pourquoi ? Parce que l'expression d'une force $F(x)$ de rappel vers la valeur d'équilibre en fonction de l'écart x à la valeur d'équilibre peut toujours s'écrire (si la force est mathématiquement assez régulière) comme un développement en série $F(x) = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \dots$, où k_1, k_2, k_3 , etc., sont des constantes. Le terme $k_1 x$ est le terme linéaire, les suivants sont les termes non linéaires. Or si l'amplitude de l'oscillation x est petite, ce qui est souvent le cas en pratique, x^2 est négligeable par rapport à x , x^3 est négligeable par rapport à x^2 , etc. Autrement dit, au premier ordre d'approximation, seul subsiste le terme linéaire et l'équation différentielle de l'oscillateur se réduit à celle de l'oscillateur harmonique, dont le comportement est décrit par des fonctions sinusoïdales.

Dans le modèle d'oscillateur harmonique que nous venons de considérer, aucune force extérieure n'est imposée au système.

Lorsqu'une telle force est présente, l'évolution dans le temps de l'oscillateur peut être très différente. Cette évolution doit désormais obéir à l'équation :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t),$$

où $f(t)$ représente les forces extérieures appliquées au système. On démontre que la solution générale s'écrit alors sous la forme :

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + I_\omega(t),$$

où la fonction $I_\omega(t)$ est donnée par une certaine intégrale où intervient la force extérieure f et qui dépend du paramètre ω . Selon l'expression de f , on peut ou non trouver une formule explicite pour $I_\omega(t)$.

Le cas où la force extérieure est une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω' , est particulièrement important, car il peut alors se produire un phénomène de résonance, un effet fréquemment rencontré avec les ondes. Si la pulsation ω' du forçage extérieur est différente de la pulsation propre ω de l'oscillateur, on trouve que l'oscillation $x(t)$ est une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations $\omega, \omega', \omega + \omega'$ et $\omega - \omega'$; son amplitude reste bornée à tout instant. Mais si $\omega' = \omega$, l'expression de $x(t)$ fait apparaître, en plus de termes périodiques de pulsations ω, ω' et $\omega + \omega'$, un terme apériodique proportionnel à $t \cos(\omega t)$, c'est-à-dire qui oscille avec une amplitude proportionnelle au temps écoulé. C'est le phénomène de résonance : lorsque la fréquence de la force extérieure est égale à la fréquence propre du système, l'amplitude de l'oscillation augmente sans limite avec le temps, jusqu'à ce que l'on sorte du régime linéaire ou que le système subisse une modification brutale. C'est par un tel phénomène de résonance qu'un pont qui vibre peut s'écrouler si une troupe le franchit en marchant au pas.

La discussion qui précède sur l'oscillateur harmonique relève de la mécanique newtonienne appliquée à un point matériel mobile (la masse m dans le cas du ressort). N'y interviennent que des fonctions d'une seule variable, le temps t . Pour décrire l'évolution de milieux continus tels qu'un solide ou un liquide, il faut introduire des fonctions qui dépendent non seulement du temps, mais aussi de la position dans l'espace, c'est-à-dire des coordonnées x, y et z . Le problème se complique alors considérablement.

En particulier, les variations dans l'espace doivent être décrites par des dérivées par rapport aux coordonnées spatiales, et les équations différentielles ordinaires que l'on a en mécanique du point sont rem-