



Daniel Palacios Jimenez

1. DANS CETTE INSTALLATION de l'artiste espagnol Daniel Palacios Jimenez [Berlin, 2006], une corde élastique est agitée à ses extrémités. Les ondes ainsi créées se propagent dans les deux sens et forment des ondes à peu près stationnaires, que perturbent les mouvements des spectateurs, captés par des caméras et transmis au mécanisme. Les variations des oscillations de la corde se traduisent aussi par des variations du son qu'elle produit. [Voir aussi la photographie page 22.]

commençons par la description d'une oscillation simple : l'oscillation de l'extrémité d'un ressort de part et d'autre de sa position d'équilibre (voir la figure 2). On suppose pour simplifier que le ressort, de masse négligeable, est posé sur un plan horizontal sans frottement, avec une masse m attachée à son extrémité. Désignons par $x(t)$ la position, qui dépend du temps t , de cette masse par rapport à la position d'équilibre. Si cet écart $x(t)$ est petit, alors la force de rappel du ressort vers la position d'équilibre est, en première approximation, proportionnelle à l'écart. Autrement dit, sa valeur algébrique est $-kx(t)$, où k est une constante positive appelée la raideur du ressort.

D'après la deuxième loi de Newton, la force appliquée à un mobile est égale au produit de sa masse par son accélération. Dans notre cas, cela s'écrit : $-kx(t) = m x''(t)$, où $x''(t)$ est la dérivée seconde de $x(t)$. En posant $\omega^2 = k/m$, on obtient que le mouvement de l'extrémité du ressort obéit à l'équation différentielle $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$.

On montre que cette équation élémentaire a pour solution générale :

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où a et b sont des constantes déterminées de façon unique par les conditions initiales, c'est-à-dire par la donnée de la position et de la vitesse du mobile à l'instant initial $t=0$ (ou à tout autre instant fixé). Cette solution est périodique, la période T étant égale à $2\pi/\omega$; la fréquence ν de l'oscillation est l'inverse de la période ($\nu = 1/T$), tandis que ω est la « pulsation » de l'oscillation, qui est proportionnelle à sa fréquence ($\omega = 2\pi\nu$). Elle est même sinusoïdale, puisque $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ s'écrit aussi sous la forme $A \cos(\omega t + \phi)$, où les constantes A et ϕ se calculent à partir de a et b .

On voit ainsi apparaître, dans ce modèle simple de l'oscillation du ressort, les fonctions périodiques élémentaires sinus et cosinus qui jouent un rôle fondamental dans la description des phénomènes ondulatoires. Une autre remarque importante est que le modèle mathématique du ressort s'applique à d'innombrables autres systèmes et est de ce fait très général ; on le nomme « oscillateur harmonique ».

Équations linéaires pour petites vibrations

En effet, toute oscillation de part et d'autre d'une valeur d'équilibre se décrit par une équation différentielle semblable à celle du ressort, à condition que les amplitudes de l'oscillation ne soient pas trop grandes. Pourquoi ? Parce que l'expression d'une force $F(x)$ de rappel vers la valeur d'équilibre en fonction de l'écart x à la valeur d'équilibre peut toujours s'écrire (si la force est mathématiquement assez régulière) comme un développement en série $F(x) = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \dots$, où k_1, k_2, k_3 , etc., sont des constantes. Le terme $k_1 x$ est le terme linéaire, les suivants sont les termes non linéaires. Or si l'amplitude de l'oscillation x est petite, ce qui est souvent le cas en pratique, x^2 est négligeable par rapport à x , x^3 est négligeable par rapport à x^2 , etc. Autrement dit, au premier ordre d'approximation, seul subsiste le terme linéaire et l'équation différentielle de l'oscillateur se réduit à celle de l'oscillateur harmonique, dont le comportement est décrit par des fonctions sinusoïdales.

Dans le modèle d'oscillateur harmonique que nous venons de considérer, aucune force extérieure n'est imposée au système.

Lorsqu'une telle force est présente, l'évolution dans le temps de l'oscillateur peut être très différente. Cette évolution doit désormais obéir à l'équation :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t),$$

où $f(t)$ représente les forces extérieures appliquées au système. On démontre que la solution générale s'écrit alors sous la forme :

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + I_\omega(t),$$

où la fonction $I_\omega(t)$ est donnée par une certaine intégrale où intervient la force extérieure f et qui dépend du paramètre ω . Selon l'expression de f , on peut ou non trouver une formule explicite pour $I_\omega(t)$.

Le cas où la force extérieure est une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω' , est particulièrement important, car il peut alors se produire un phénomène de résonance, un effet fréquemment rencontré avec les ondes. Si la pulsation ω' du forçage extérieur est différente de la pulsation propre ω de l'oscillateur, on trouve que l'oscillation $x(t)$ est une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations $\omega, \omega', \omega + \omega'$ et $\omega - \omega'$; son amplitude reste bornée à tout instant. Mais si $\omega' = \omega$, l'expression de $x(t)$ fait apparaître, en plus de termes périodiques de pulsations ω, ω' et $\omega + \omega'$, un terme apériodique proportionnel à $t \cos(\omega t)$, c'est-à-dire qui oscille avec une amplitude proportionnelle au temps écoulé. C'est le phénomène de résonance : lorsque la fréquence de la force extérieure est égale à la fréquence propre du système, l'amplitude de l'oscillation augmente sans limite avec le temps, jusqu'à ce que l'on sorte du régime linéaire ou que le système subisse une modification brutale. C'est par un tel phénomène de résonance qu'un pont qui vibre peut s'écrouler si une troupe le franchit en marchant au pas.

La discussion qui précède sur l'oscillateur harmonique relève de la mécanique newtonienne appliquée à un point matériel mobile (la masse m dans le cas du ressort). N'y interviennent que des fonctions d'une seule variable, le temps t . Pour décrire l'évolution de milieux continus tels qu'un solide ou un liquide, il faut introduire des fonctions qui dépendent non seulement du temps, mais aussi de la position dans l'espace, c'est-à-dire des coordonnées x, y et z . Le problème se complique alors considérablement.

En particulier, les variations dans l'espace doivent être décrites par des dérivées par rapport aux coordonnées spatiales, et les équations différentielles ordinaires que l'on a en mécanique du point sont rem-

placées par des « équations aux dérivées partielles » en mécanique des milieux continus. Le premier exemple d'une telle équation est, semble-t-il, dû au mathématicien français Jean le Rond d'Alembert et concerne la vibration d'une corde ; il date de 1747 – pas si longtemps après l'invention du calcul infinitésimal pour les fonctions d'une seule variable, par Newton et Leibniz autour de 1670. Le mathématicien suisse Leonhard Euler suivra en 1755 en obtenant l'équation qui régit l'écoulement des fluides incompressibles et non visqueux. On est ainsi passé de la mécanique du point matériel à l'élasticité, puis à la mécanique des fluides.

Ondes stationnaires dans un espace fermé

L'équation qui régit les vibrations d'une corde de longueur finie L se déduit, comme pour le ressort, en appliquant la deuxième loi de Newton. Mais au lieu de l'appliquer à un point matériel, on l'applique à chacune des parties infinitésimales de la corde. On suppose celle-ci homogène, infiniment étroite, alignée au repos selon l'axe Ox et fixée à ses deux extrémités, de coordonnées $x=0$ et $x=L$. On suppose aussi qu'elle est soumise à une force de tension T constante et que chacun de ses points, repérés par leur coordonnée x , peut s'écarter transversalement de la position d'équilibre $u=0$ d'une petite quantité $u(x,t)$ (voir la figure 3).

Un raisonnement géométrique assez simple sur un élément infinitésimal dx de corde, de masse ρdx , où ρ est la masse de corde par unité de longueur, montre alors que, en posant $c^2 = T/\rho$, la deuxième loi de Newton se traduit en l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \partial^2 u / \partial x^2 = 0.$$

La notation $\partial u / \partial x$ désigne la dérivée de $u(x,t)$ par rapport à x en considérant t constant, $\partial u / \partial t$ la dérivée de $u(x,t)$ par rapport à t en considérant x constant, $\partial^2 u / \partial t^2$ la dérivée seconde de u par rapport à t , etc. Ces dérivées portant sur des fonctions de plusieurs variables sont nommées « dérivées partielles ».

L'équation obtenue par d'Alembert constitue le prototype de l'équation des ondes à une dimension, où c représente la vitesse de propagation de l'onde. Pour exprimer le fait que la corde est fixée à ses deux bouts, on complète l'équation par les conditions aux limites :

$$u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0.$$

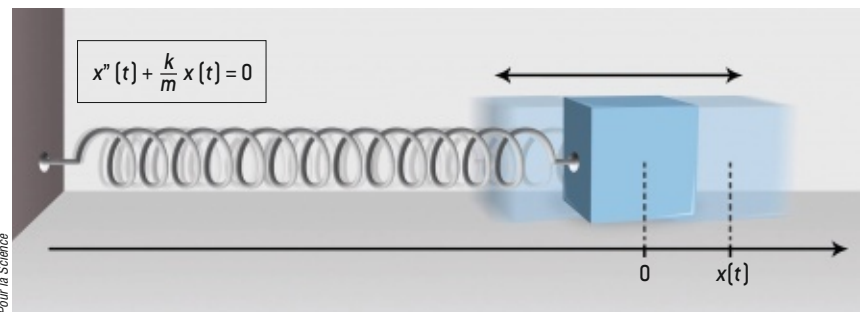
En cherchant pour l'équation de d'Alembert des solutions $u(x,t)$ sous la forme d'un produit $a(x)b(t)$ à variables séparées, on obtient les deux équations différentielles :

$a''(x) + (\omega^2/c^2)a(x) = 0$ et $b''(t) + \omega^2 b(t) = 0$, où ω^2 est, pour le moment, un paramètre positif quelconque. Ces deux équations sont exactement de la même forme que celle de l'oscillateur harmonique. On en déduit, compte tenu des conditions aux limites, que l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante a des solutions particulières de la forme :

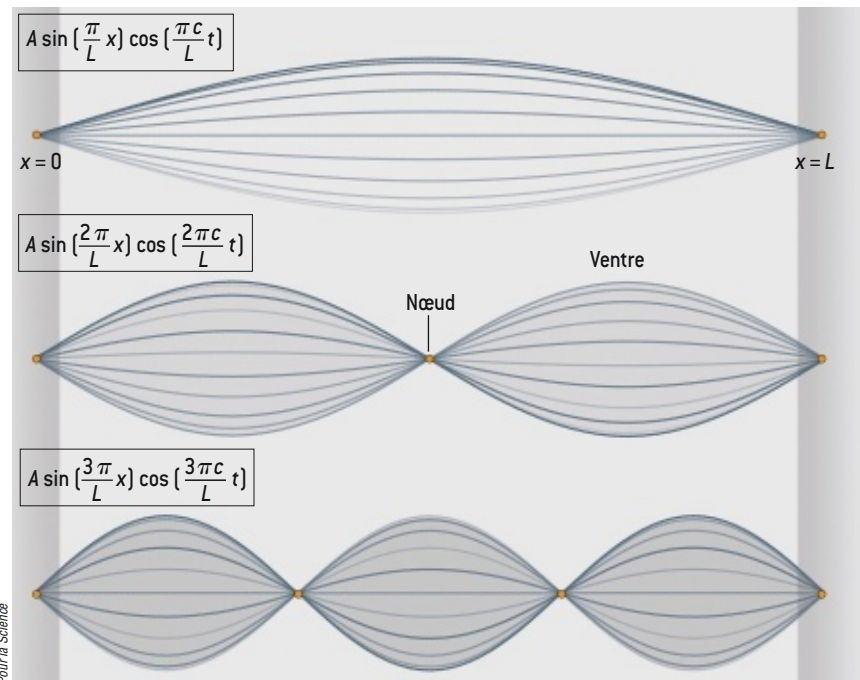
$u_n(x,t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$, où n est un entier positif quelconque, $k_n = n\pi/L$ et $\omega_n = n\pi c/L = k_n c$, les constan-

tes A_n et ϕ_n restant à déterminer en fonction des conditions initiales par exemple.

Que signifie physiquement une telle solution ? En chaque point, la corde oscille dans le temps à une pulsation ω_n , tandis que l'amplitude de l'oscillation est modulée le long de la corde par la fonction périodique $\sin(k_n x)$. Les points x pour lesquels on a $\sin(k_n x) = 0$ ne vibrent pas du tout, ce sont les « nœuds » de vibration ; ceux pour lesquels $\sin(k_n x) = \pm 1$ vibrent avec l'amplitude maximale, ce sont les « ventres » de vibration. L'oscillation décrite par une fonction $u_n(x,t)$ est ce qu'on appelle une onde stationnaire, car les positions des nœuds et ventres de vibration restent fixes au cours du temps.



2. LE MOUVEMENT D'UNE MASSE LIÉE À UN RESSORT est décrit, pour un écart $x(t)$ petit par rapport à la position d'équilibre, par une équation différentielle linéaire simple (cartouche), dont la solution est une fonction sinusoïdale du temps t . Une telle oscillation a un caractère très général.



3. TROIS ONDES STATIONNAIRES animant une corde fixée à ses deux extrémités [avec une amplitude très exagérée, et pour 11 instants successifs]. Elles correspondent ici aux trois premiers modes propres d'oscillation de la corde, la fréquence de la deuxième onde étant le double de celle de la première, et la fréquence de la troisième le triple. Toute oscillation de la corde peut s'écrire comme une somme d'un nombre fini ou infini de ses modes propres.