

placées par des « équations aux dérivées partielles » en mécanique des milieux continus. Le premier exemple d'une telle équation est, semble-t-il, dû au mathématicien français Jean le Rond d'Alembert et concerne la vibration d'une corde ; il date de 1747 – pas si longtemps après l'invention du calcul infinitésimal pour les fonctions d'une seule variable, par Newton et Leibniz autour de 1670. Le mathématicien suisse Leonhard Euler suivra en 1755 en obtenant l'équation qui régit l'écoulement des fluides incompressibles et non visqueux. On est ainsi passé de la mécanique du point matériel à l'élasticité, puis à la mécanique des fluides.

Ondes stationnaires dans un espace fermé

L'équation qui régit les vibrations d'une corde de longueur finie L se déduit, comme pour le ressort, en appliquant la deuxième loi de Newton. Mais au lieu de l'appliquer à un point matériel, on l'applique à chacune des parties infinitésimales de la corde. On suppose celle-ci homogène, infiniment étroite, alignée au repos selon l'axe Ox et fixée à ses deux extrémités, de coordonnées $x=0$ et $x=L$. On suppose aussi qu'elle est soumise à une force de tension T constante et que chacun de ses points, repérés par leur coordonnée x , peut s'écarter transversalement de la position d'équilibre $u=0$ d'une petite quantité $u(x,t)$ (voir la figure 3).

Un raisonnement géométrique assez simple sur un élément infinitésimal dx de corde, de masse ρdx , où ρ est la masse de corde par unité de longueur, montre alors que, en posant $c^2 = T/\rho$, la deuxième loi de Newton se traduit en l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \partial^2 u / \partial x^2 = 0.$$

La notation $\partial u / \partial x$ désigne la dérivée de $u(x,t)$ par rapport à x en considérant t constant, $\partial u / \partial t$ la dérivée de $u(x,t)$ par rapport à t en considérant x constant, $\partial^2 u / \partial t^2$ la dérivée seconde de u par rapport à t , etc. Ces dérivées portant sur des fonctions de plusieurs variables sont nommées « dérivées partielles ».

L'équation obtenue par d'Alembert constitue le prototype de l'équation des ondes à une dimension, où c représente la vitesse de propagation de l'onde. Pour exprimer le fait que la corde est fixée à ses deux bouts, on complète l'équation par les conditions aux limites :

$$u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0.$$

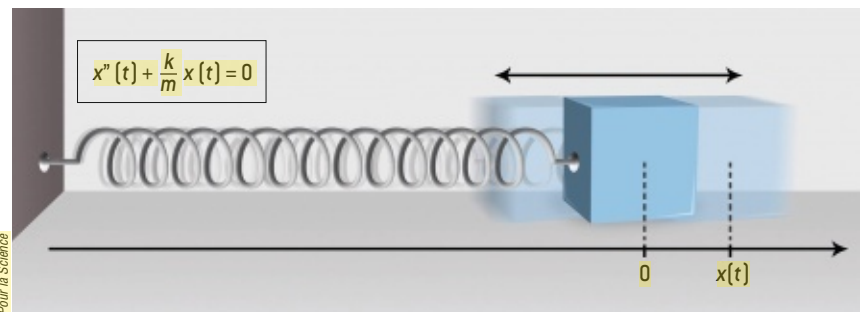
En cherchant pour l'équation de d'Alembert des solutions $u(x,t)$ sous la forme d'un produit $a(x)b(t)$ à variables séparées, on obtient les deux équations différentielles :

$a''(x) + (\omega^2/c^2)a(x) = 0$ et $b''(t) + \omega^2 b(t) = 0$, où ω^2 est, pour le moment, un paramètre positif quelconque. Ces deux équations sont exactement de la même forme que celle de l'oscillateur harmonique. On en déduit, compte tenu des conditions aux limites, que l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante a des solutions particulières de la forme :

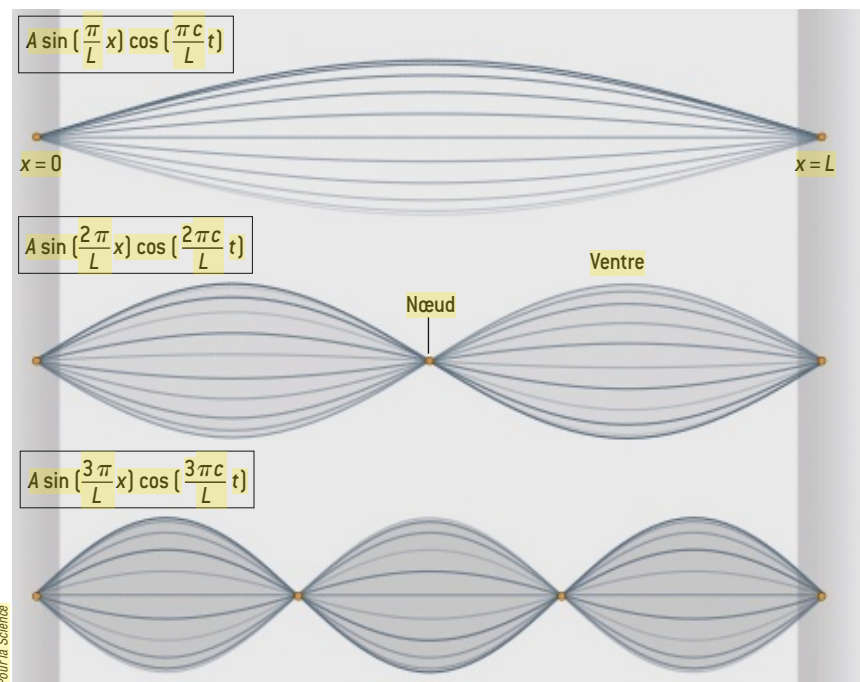
$u_n(x,t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$, où n est un entier positif quelconque, $k_n = n\pi/L$ et $\omega_n = n\pi c/L = k_n c$, les constan-

tes A_n et ϕ_n restant à déterminer en fonction des conditions initiales par exemple.

Que signifie physiquement une telle solution ? En chaque point, la corde oscille dans le temps à une pulsation ω_n , tandis que l'amplitude de l'oscillation est modulée le long de la corde par la fonction périodique $\sin(k_n x)$. Les points x pour lesquels on a $\sin(k_n x) = 0$ ne vibrent pas du tout, ce sont les « nœuds » de vibration ; ceux pour lesquels $\sin(k_n x) = \pm 1$ vibrent avec l'amplitude maximale, ce sont les « ventres » de vibration. L'oscillation décrite par une fonction $u_n(x,t)$ est ce qu'on appelle une onde stationnaire, car les positions des nœuds et ventres de vibration restent fixes au cours du temps.



2. LE MOUVEMENT D'UNE MASSE LIÉE À UN RESSORT est décrit, pour un écart $x(t)$ petit par rapport à la position d'équilibre, par une équation différentielle linéaire simple (cartouche), dont la solution est une fonction sinusoïdale du temps t . Une telle oscillation a un caractère très général.



3. TROIS ONDES STATIONNAIRES animant une corde fixée à ses deux extrémités [avec une amplitude très exagérée, et pour 11 instants successifs]. Elles correspondent ici aux trois premiers modes propres d'oscillation de la corde, la fréquence de la deuxième onde étant le double de celle de la première, et la fréquence de la troisième le triple. Toute oscillation de la corde peut s'écrire comme une somme d'un nombre fini ou infini de ses modes propres.

L'AUTEUR



Claude BARDOS, mathématicien, est professeur émérite à l'Université Paris 7 [Denis Diderot]. Il est membre du Laboratoire Jacques-Louis Lions à l'Université Pierre et Marie Curie, à Paris.

On appelle la solution $u_1(x, t)$, de la forme $\sin(k_1 x) \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ avec $k_1 = \pi/L$ et $\omega_1 = \pi c/L$, le « mode fondamental » de vibration de la corde. Les autres solutions u_n correspondent à des fréquences de vibration égales à un multiple entier de la fréquence fondamentale et sont qualifiées d'harmoniques. Les ondes stationnaires $u_n(x, t)$ sont aussi nommées modes propres de vibration, car elles caractérisent les vibrations possibles d'une corde qui n'est pas soumise à des forces extérieures.

Comme l'équation des ondes de d'Alembert est linéaire, toute somme finie d'harmoniques $u_n(x, t)$ est encore une solution possible. En fait, l'analyse mathématique moderne, introduite par le mathématicien allemand David Hilbert il y a un

siècle, a établi un résultat bien plus fort : toute solution de l'équation peut s'exprimer comme une somme de la forme :

$A_1(t) \sin(k_1 x) + A_2(t) \sin(k_2 x) + \dots$
où $A_n(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation $\omega_n = k_n c$.

Des modes propres

On montre que les fonctions $\sin(k_n x)$ forment en effet une « base » de l'espace fonctionnel adéquat pour décrire les oscillations de la corde de longueur L , c'est-à-dire un espace de fonctions où l'on peut définir des notions de distance, de produit scalaire, de convergence, etc. Dans ce cadre formel, les fonctions $\sin(k_n x)$ doivent leur importance au fait que ce sont des « fonc-

La place privilégiée des ondes sinusoïdales

Pourquoi les sinusoïdes sont-elles si importantes dans la science des ondes ? De nombreux manuels de physique présentent systématiquement les solutions de l'équation des ondes sous forme sinusoïdale. Mais dans la réalité, l'évolution temporelle des ondes n'est jamais vraiment sinusoïdale, car une sinusoïde est une fonction idéale, partant d'un temps infini dans le passé et allant jusqu'à un temps infini dans le futur. Il faudrait ainsi que la source ayant donné naissance à l'onde soit active depuis un temps infini !

En pratique, il existe aussi bien des ondes pulsées très brèves, de spectre très large, que des ondes de forme temporelle très complexe. Il est vrai qu'en optique, les lasers peuvent émettre une onde lumineuse presque monochromatique, donc sinusoïdale. De même, les modes de vibration d'une corde dont les deux extrémités sont fixes correspondent à une oscillation collective de la corde qui est modulée par une sinusoïde. Mais ces deux exemples ne sont que des cas particuliers.

Pour comprendre le caractère universel et l'intérêt pratique de la modulation sinusoïdale en physique des ondes, il faut regarder de plus près l'équation des ondes en régime linéaire. Dans sa variante acoustique, le champ ondulatoire vérifie une équation d'onde du type

$\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \Delta u = S$, où $S(r, t)$ est une fonction source qui décrit l'ensemble des sources de l'onde (par exemple les haut-parleurs).

La relation qui existe entre le terme source $S(r, t)$ (la cause) et l'onde $u(r, t)$ (l'effet) a deux propriétés importantes. D'une part, elle est linéaire. D'autre part, si la vitesse c de l'onde ne varie pas au cours du temps, elle est « invariante par translation du temps » : l'onde créée par un haut-parleur excité dans une heure sera la même, à une heure près, que celle créée par ce même haut-parleur maintenant. La source peut avoir toutes les formes possibles de modulation temporelle. Si par exemple c'est la membrane d'un haut-parleur qui bouge de façon uniforme, le terme source peut s'écrire $S(r, t) = O(r)s(t)$, où $s(t)$ est la modulation temporelle de la source.

L'intérêt mathématique de la modulation sinusoïdale est le suivant : c'est la seule modulation temporelle qui se conserve dans tout le champ ondulatoire. Autrement dit, si la source vibre de façon sinusoïdale, le champ acoustique $u(r, t)$ mesuré en tous les points de l'espace aura la même modulation sinusoïdale (en revanche, l'amplitude et la phase dépendront du point d'observation). Le champ $u(r, t)$ oscillera partout avec la même pulsation ω que celle de la source. On dira que

la solution sinusoïdale est un invariant de l'opérateur de l'équation des ondes (on dit aussi un « vecteur propre »). La cause (la source) et l'effet (l'onde dans tout l'espace) auront exactement la même modulation temporelle.

Si, en revanche, tous les points du haut-parleur se déplaçaient pendant un temps bref avec une modulation temporelle quelconque (un créneau par exemple), la modulation temporelle de l'onde ne serait plus la même que celle de la source et différerait en chaque point de l'espace. Les signaux émis par chacun des points de la source mettent en effet un certain temps pour arriver en un point d'observation, et en ce point l'onde résultera de la somme de toutes les ondes émise par la source. Or la somme de nombreux petits créneaux décalés les uns par rapport aux autres ne ressemblera pas au créneau initial. Ce sera une fonction du temps compliquée, qui dépendra du point d'observation.

Parmi toutes les fonctions du temps, il n'en existe qu'une – la sinusoïde – qui se conservera : la somme d'une infinité de sinusoïdes de même pulsation ω et d'amplitude et de phase quelconques sera toujours une sinusoïde de pulsation ω . C'est là tout l'intérêt d'une source sinusoïdale. Un autre exem-

ple de l'intérêt de la sinusoïde est l'émission d'un signal dans un milieu où la célérité de l'onde est très hétérogène (la vitesse $c(r)$ de l'onde dépend de la position r). Par exemple, si une source émet un signal dans un milieu diffusant composé de nombreux obstacles, l'onde perçue en un point de l'espace sera la superposition de nombreux signaux élémentaires ayant suivi des trajets multiples. Si la source émet un signal bref, l'onde perçue pourra durer très longtemps avec des modulations très compliquées, qui ne ressembleront plus du tout à celle de la source. Mais si la source est modulée par une sinusoïde de pulsation ω , quelle que soit la complexité du milieu diffusant, la modulation de l'onde en tout point de l'espace sera toujours celle d'une sinusoïde de pulsation ω .

La sinusoïde est donc une fonction très pratique lorsqu'on s'intéresse à la physique des ondes. Mais limiter tous les raisonnements ondulatoires à ce type de signaux est très réducteur. Il existe une physique des ondes bien plus riche en milieu hétérogène avec des sources de modulation temporelle plus sophistiquée (voir l'article La complexité : un atout pour le retournement temporel des ondes dans ce numéro).

Mathias Fink,

Institut Langevin, ESPCI ParisTech