

L'AUTEUR



Claude BARDOS, mathématicien, est professeur émérite à l'Université Paris 7 [Denis Diderot]. Il est membre du Laboratoire Jacques-Louis Lions à l'Université Pierre et Marie Curie, à Paris.

On appelle la solution $u_1(x,t)$, de la forme $\sin(k_1 x) \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ avec $k_1 = \pi/L$ et $\omega_1 = \pi c/L$, le « mode fondamental » de vibration de la corde. Les autres solutions u_n correspondent à des fréquences de vibration égales à un multiple entier de la fréquence fondamentale et sont qualifiées d'harmoniques. Les ondes stationnaires $u_n(x,t)$ sont aussi nommées modes propres de vibration, car elles caractérisent les vibrations possibles d'une corde qui n'est pas soumise à des forces extérieures.

Comme l'équation des ondes d'Alembert est linéaire, toute somme finie d'harmoniques $u_n(x,t)$ est encore une solution possible. En fait, l'analyse mathématique moderne, introduite par le mathématicien allemand David Hilbert il y a un

siècle, a établi un résultat bien plus fort : toute solution de l'équation peut s'exprimer comme une somme de la forme :

$A_1(t) \sin(k_1 x) + A_2(t) \sin(k_2 x) + \dots$
où $A_n(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation $\omega_n = k_n c$.

Des modes propres

On montre que les fonctions $\sin(k_n x)$ forment en effet une « base » de l'espace fonctionnel adéquat pour décrire les oscillations de la corde de longueur L , c'est-à-dire un espace de fonctions où l'on peut définir des notions de distance, de produit scalaire, de convergence, etc. Dans ce cadre formel, les fonctions $\sin(k_n x)$ doivent leur importance au fait que ce sont des « fonc-

La place privilégiée des ondes sinusoïdales

Pourquoi les sinusoïdes sont-elles si importantes dans la science des ondes ? De nombreux manuels de physique présentent systématiquement les solutions de l'équation des ondes sous forme sinusoïdale. Mais dans la réalité, l'évolution temporelle des ondes n'est jamais vraiment sinusoïdale, car une sinusoïde est une fonction idéale, partant d'un temps infini dans le passé et allant jusqu'à un temps infini dans le futur. Il faudrait ainsi que la source ayant donné naissance à l'onde soit active depuis un temps infini !

En pratique, il existe aussi bien des ondes pulsées très brèves, de spectre très large, que des ondes de forme temporelle très complexe. Il est vrai qu'en optique, les lasers peuvent émettre une onde lumineuse presque monochromatique, donc sinusoïdale. De même, les modes de vibration d'une corde dont les deux extrémités sont fixes correspondent à une oscillation collective de la corde qui est modulée par une sinusoïde. Mais ces deux exemples ne sont que des cas particuliers.

Pour comprendre le caractère universel et l'intérêt pratique de la modulation sinusoïdale en physique des ondes, il faut regarder de plus près l'équation des ondes en régime linéaire. Dans sa variante acoustique, le champ ondulatoire vérifie une équation d'onde du type

$\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \Delta u = S$, où $S(r, t)$ est une fonction source qui décrit l'ensemble des sources de l'onde (par exemple les haut-parleurs).

La relation qui existe entre le terme source $S(r, t)$ (la cause) et l'onde $u(r, t)$ (l'effet) a deux propriétés importantes. D'une part, elle est linéaire. D'autre part, si la vitesse c de l'onde ne varie pas au cours du temps, elle est « invariante par translation du temps » : l'onde créée par un haut-parleur excité dans une heure sera la même, à une heure près, que celle créée par ce même haut-parleur maintenant. La source peut avoir toutes les formes possibles de modulation temporelle. Si par exemple c'est la membrane d'un haut-parleur qui bouge de façon uniforme, le terme source peut s'écrire $S(r, t) = O(r)s(t)$, où $s(t)$ est la modulation temporelle de la source.

L'intérêt mathématique de la modulation sinusoïdale est le suivant : c'est la seule modulation temporelle qui se conserve dans tout le champ ondulatoire. Autrement dit, si la source vibre de façon sinusoïdale, le champ acoustique $u(r, t)$ mesuré en tous les points de l'espace aura la même modulation sinusoïdale (en revanche, l'amplitude et la phase dépendront du point d'observation). Le champ $u(r, t)$ oscillera partout avec la même pulsation ω que celle de la source. On dira que

la solution sinusoïdale est un invariant de l'opérateur de l'équation des ondes (on dit aussi un « vecteur propre »). La cause (la source) et l'effet (l'onde dans tout l'espace) auront exactement la même modulation temporelle.

Si, en revanche, tous les points du haut-parleur se déplaçaient pendant un temps bref avec une modulation temporelle quelconque (un créneau par exemple), la modulation temporelle de l'onde ne serait plus la même que celle de la source et différerait en chaque point de l'espace. Les signaux émis par chacun des points de la source mettent en effet un certain temps pour arriver en un point d'observation, et en ce point l'onde résultera de la somme de toutes les ondes é émises par la source. Or la somme de nombreux petits créneaux décalés les uns par rapport aux autres ne ressemblera pas au créneau initial. Ce sera une fonction du temps compliquée, qui dépendra du point d'observation.

Parmi toutes les fonctions du temps, il n'en existe qu'une – la sinusoïde – qui se conservera : la somme d'une infinité de sinusoïdes de même pulsation ω et d'amplitude et de phase quelconques sera toujours une sinusoïde de pulsation ω . C'est là tout l'intérêt d'une source sinusoïdale. Un autre exem-

ple de l'intérêt de la sinusoïde est l'émission d'un signal dans un milieu où la célérité de l'onde est très hétérogène (la vitesse $c(r)$ de l'onde dépend de la position r). Par exemple, si une source émet un signal dans un milieu diffusant composé de nombreux obstacles, l'onde perçue en un point de l'espace sera la superposition de nombreux signaux élémentaires ayant suivi des trajets multiples. Si la source émet un signal bref, l'onde perçue pourra durer très longtemps avec des modulations très compliquées, qui ne ressembleront plus du tout à celle de la source. Mais si la source est modulée par une sinusoïde de pulsation ω , quelle que soit la complexité du milieu diffusant, la modulation de l'onde en tout point de l'espace sera toujours celle d'une sinusoïde de pulsation ω .

La sinusoïde est donc une fonction très pratique lorsqu'on s'intéresse à la physique des ondes. Mais limiter tous les raisonnements ondulatoires à ce type de signaux est très réducteur. Il existe une physique des ondes bien plus riche en milieu hétérogène avec des sources de modulation temporelle plus sophistiquée (voir l'article La complexité : un atout pour le retournement temporel des ondes dans ce numéro).

Mathias Fink,

Institut Langevin, ESPCI ParisTech

tions propres » de l'opérateur nommé laplacien et noté Δ , défini à une dimension par $\Delta f = \partial^2 f / \partial x^2$ et complété par les conditions aux limites du problème considéré. On dit que f est une fonction propre de Δ si Δf est proportionnel à f , c'est-à-dire si $\Delta f = \alpha f$, où α est une constante, qualifiée de valeur propre. C'est le cas des fonctions $\sin(k_n x)$, puisqu'elles vérifient :

$$\Delta[\sin(k_n x)] = \partial^2[\sin(k_n x)] / \partial x^2 = -k_n^2 \sin(k_n x).$$

Ainsi, les solutions de l'équation de d'Alembert pour la corde de longueur L peuvent s'écrire sous la forme :

$$A_1(t) \sin(k_1 x) + A_2(t) \sin(k_2 x) + \dots$$

Une telle somme est un exemple de « séries de Fourier », introduites par Joseph Fourier en 1822, mais dont une théorie satisfaisante n'a vu le jour qu'un siècle plus tard, grâce aux premiers concepts de l'analyse fonctionnelle et à une théorie de l'intégration plus puissante que la précédente. Les séries de Fourier ont d'ailleurs donné naissance à plusieurs branches de l'analyse : l'analyse harmonique, la théorie du signal, celle des ondelettes, etc.

Ces considérations se généralisent à des espaces ou des domaines de dimension supérieure à 1 et permettent d'étudier les vibrations de la peau d'un tambour, d'une plaque métallique, d'un solide plein, etc. En dimension 3, l'équation des ondes de faible amplitude, sans forçage extérieur et limitées à un domaine borné de l'espace, s'écrit ainsi :

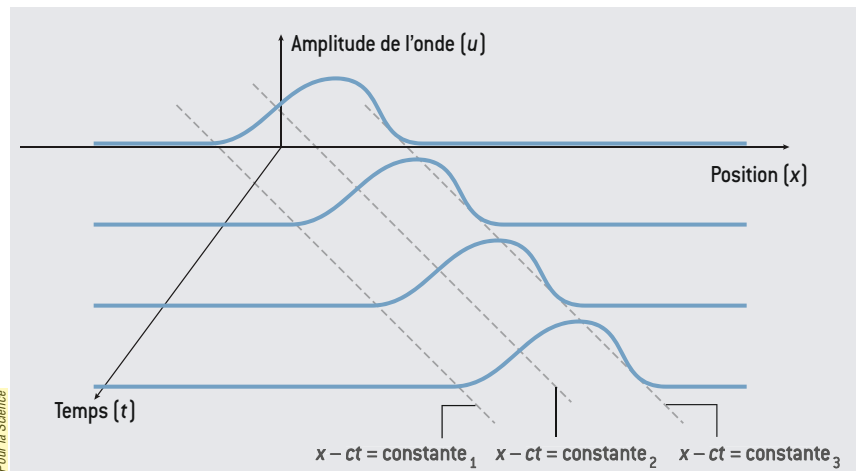
$$\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \Delta u = 0,$$

où le laplacien est défini par :

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2.$$

Comme en dimension 1, on recherche un ensemble adéquat de fonctions propres $f_n(x, y, z)$ telles que $\Delta f_n = \alpha_n f_n$, où les α_n sont les valeurs propres et où les fonctions f_n vérifient les conditions aux limites imposées. Les solutions possibles de l'équation des ondes sont alors des sommes $A_1(t) f_1(x, y, z) + A_2(t) f_2(x, y, z) + \dots$, où les $A_n(t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps, avec des pulsations ω_n données par les valeurs propres ($\omega_n^2 = -c^2 \alpha_n$). Chaque des termes représente un « mode propre d'oscillation » du système et le « spectre » désigne l'ensemble des fréquences possibles.

Soulignons que les fonctions et valeurs propres du laplacien dépendent de la géométrie du problème. La détermination des valeurs propres (le spectre) et l'analyse de leur relation avec cette géométrie ont de nombreuses applications, par exemple à l'étude des instruments de



4. L'ÉQUATION DE D'ALEMBERT pour les ondes à une dimension a des solutions de la forme $u(x, t) = f(x - ct)$, où f est n'importe quelle fonction d'une seule variable. Une telle solution représente une onde qui se propage sans se déformer à la vitesse c dans le sens positif sur l'axe Ox .

musique, mais aussi au contrôle non destructif, à la physique quantique, à la théorie des nombres, etc.

Une autre remarque concerne le cas où il existe un forçage extérieur (une source extérieure). Cette situation est plus compliquée, mais l'analyse en modes propres reste indispensable et sert de base pour déterminer le comportement du système et étudier les phénomènes de résonance notamment, comme on l'a expliqué plus haut en dimension 1.

Propagation dans un espace ouvert

Dans ce qui précède, le fait que les oscillations se développent dans un domaine borné (sur une longueur L dans le cas de la corde) est essentiel. C'est une contrainte forte sur les fonctions et vecteurs propres du laplacien, et elle détermine une infinité dénombrable (non continue) de modes d'oscillation.

Que se passe-t-il par exemple pour une corde vibrante de longueur infinie ? La recherche de solutions à variables séparées conduit dans ce cas à des solutions du type $A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi)$, où $k = \omega/c$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle. On a donc une infinité continue de solutions particulières, et un spectre continu de fréquences.

Dans cette situation, les solutions plus générales de l'équation de la corde vibrante ne sont pas des séries de Fourier (des sommes dénombrables de fonctions sinusoïdales), mais des intégrales de Fourier (des sommes continues de fonctions sinusoïda-

les). L'étude de l'équation des ondes peut être alors effectuée en écrivant sous forme d'intégrales les fonctions recherchées. Cette technique, la transformation de Fourier, s'adapte à de très nombreux problèmes.

Pour la corde vibrante, un calcul simple montre directement un résultat intéressant. On remarque en effet que toute fonction $u(x, t)$ de la forme $f(x - ct)$ ou $g(x + ct)$, où f et g sont des fonctions quelconques d'une seule variable, vérifie a priori l'équation des ondes $\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \partial^2 u / \partial x^2 = 0$. Or $f(x - ct)$ représente une onde qui se propage sans se déformer vers la droite à la vitesse c , tandis que $g(x + ct)$ représente une onde qui se propage sans se déformer à la vitesse $-c$, c'est-à-dire vers la gauche à la vitesse $+c$ (voir la figure 3). La solution générale de l'équation de la corde vibrante est alors une superposition $f(x - ct) + g(x + ct)$ de ces deux ondes voyageant en sens opposés, que l'on peut en principe déterminer complètement si l'on connaît la position et la vitesse de tous les points de la corde à un instant initial.

L'exemple simple de la corde vibrante a mis en évidence deux comportements liés à la notion d'onde : les oscillations dans le cas d'un domaine borné, et la propagation dans le cas d'un domaine infini. Nous avons jusqu'ici considéré l'équation de d'Alembert, qui s'applique à la corde vibrante et à de nombreux autres systèmes. Mais il existe d'autres types d'équations d'onde : l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, l'équation d'Airy qui intervient dans l'étude des caustiques (concentrations de lumière), l'équation de la vibration des poutres, etc. Les trois exemples cités sont des