

tions propres » de l'opérateur nommé laplacien et noté Δ , défini à une dimension par $\Delta f = \partial^2 f / \partial x^2$ et complété par les conditions aux limites du problème considéré. On dit que f est une fonction propre de Δ si Δf est proportionnel à f , c'est-à-dire si $\Delta f = \alpha f$, où α est une constante, qualifiée de valeur propre. C'est le cas des fonctions $\sin(k_n x)$, puisqu'elles vérifient :

$$\Delta[\sin(k_n x)] = \partial^2[\sin(k_n x)] / \partial x^2 = -k_n^2 \sin(k_n x).$$

Ainsi, les solutions de l'équation de d'Alembert pour la corde de longueur L peuvent s'écrire sous la forme :

$$A_1(t) \sin(k_1 x) + A_2(t) \sin(k_2 x) + \dots$$

Une telle somme est un exemple de « séries de Fourier », introduites par Joseph Fourier en 1822, mais dont une théorie satisfaisante n'a vu le jour qu'un siècle plus tard, grâce aux premiers concepts de l'analyse fonctionnelle et à une théorie de l'intégration plus puissante que la précédente. Les séries de Fourier ont d'ailleurs donné naissance à plusieurs branches de l'analyse : l'analyse harmonique, la théorie du signal, celle des ondelettes, etc.

Ces considérations se généralisent à des espaces ou des domaines de dimension supérieure à 1 et permettent d'étudier les vibrations de la peau d'un tambour, d'une plaque métallique, d'un solide plein, etc. En dimension 3, l'équation des ondes de faible amplitude, sans forçage extérieur et limitées à un domaine borné de l'espace, s'écrit ainsi :

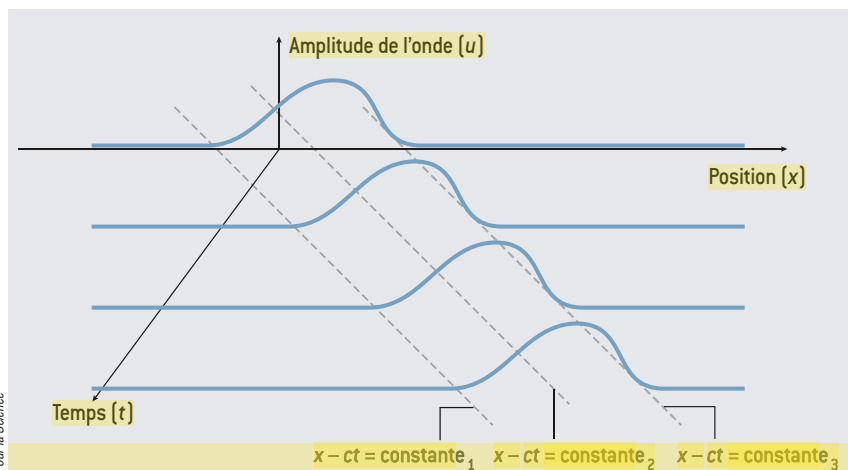
$$\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \Delta u = 0,$$

où le laplacien est défini par :

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2.$$

Comme en dimension 1, on recherche un ensemble adéquat de fonctions propres $f_n(x, y, z)$ telles que $\Delta f_n = \alpha_n f_n$, où les α_n sont les valeurs propres et où les fonctions f_n vérifient les conditions aux limites imposées. Les solutions possibles de l'équation des ondes sont alors des sommes $A_1(t) f_1(x, y, z) + A_2(t) f_2(x, y, z) + \dots$, où les $A_n(t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps, avec des pulsations ω_n données par les valeurs propres ($\omega_n^2 = -c^2 \alpha_n$). Chaque des termes représente un « mode propre d'oscillation » du système et le « spectre » désigne l'ensemble des fréquences possibles.

Soulignons que les fonctions et valeurs propres du laplacien dépendent de la géométrie du problème. La détermination des valeurs propres (le spectre) et l'analyse de leur relation avec cette géométrie ont de nombreuses applications, par exemple à l'étude des instruments de



4. L'ÉQUATION DE D'ALEMBERT pour les ondes à une dimension a des solutions de la forme $u(x, t) = f(x - ct)$, où f est n'importe quelle fonction d'une seule variable. Une telle solution représente une onde qui se propage sans se déformer à la vitesse c dans le sens positif sur l'axe Ox .

musique, mais aussi au contrôle non destructif, à la physique quantique, à la théorie des nombres, etc.

Une autre remarque concerne le cas où il existe un forçage extérieur (une source extérieure). Cette situation est plus compliquée, mais l'analyse en modes propres reste indispensable et sert de base pour déterminer le comportement du système et étudier les phénomènes de résonance notamment, comme on l'a expliqué plus haut en dimension 1.

Propagation dans un espace ouvert

Dans ce qui précède, le fait que les oscillations se développent dans un domaine borné (sur une longueur L dans le cas de la corde) est essentiel. C'est une contrainte forte sur les fonctions et vecteurs propres du laplacien, et elle détermine une infinité dénombrable (non continue) de modes d'oscillation.

Que se passe-t-il par exemple pour une corde vibrante de longueur infinie ? La recherche de solutions à variables séparées conduit dans ce cas à des solutions du type $A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi)$, où $k = \omega/c$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle. On a donc une infinité continue de solutions particulières, et un spectre continu de fréquences.

Dans cette situation, les solutions plus générales de l'équation de la corde vibrante ne sont pas des séries de Fourier (des sommes dénombrables de fonctions sinusoïdales), mais des intégrales de Fourier (des sommes continues de fonctions sinusoïda-

les). L'étude de l'équation des ondes peut être alors effectuée en écrivant sous forme d'intégrales les fonctions recherchées. Cette technique, la transformation de Fourier, s'adapte à de très nombreux problèmes.

Pour la corde vibrante, un calcul simple montre directement un résultat intéressant. On remarque en effet que toute fonction $u(x, t)$ de la forme $f(x - ct)$ ou $g(x + ct)$, où f et g sont des fonctions quelconques d'une seule variable, vérifie a priori l'équation des ondes $\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \partial^2 u / \partial x^2 = 0$. Or $f(x - ct)$ représente une onde qui se propage sans se déformer vers la droite à la vitesse c , tandis que $g(x + ct)$ représente une onde qui se propage sans se déformer à la vitesse $-c$, c'est-à-dire vers la gauche à la vitesse $+c$ (voir la figure 3). La solution générale de l'équation de la corde vibrante est alors une superposition $f(x - ct) + g(x + ct)$ de ces deux ondes voyageant en sens opposés, que l'on peut en principe déterminer complètement si l'on connaît la position et la vitesse de tous les points de la corde à un instant initial.

L'exemple simple de la corde vibrante a mis en évidence deux comportements liés à la notion d'onde : les oscillations dans le cas d'un domaine borné, et la propagation dans le cas d'un domaine infini. Nous avons jusqu'ici considéré l'équation de d'Alembert, qui s'applique à la corde vibrante et à de nombreux autres systèmes. Mais il existe d'autres types d'équations d'onde : l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, l'équation d'Airy qui intervient dans l'étude des caustiques (concentrations de lumière), l'équation de la vibration des poutres, etc. Les trois exemples cités sont des