

tions propres » de l'opérateur nommé laplacien et noté Δ , défini à une dimension par $\Delta f = \partial^2 f / \partial x^2$ et complété par les conditions aux limites du problème considéré. On dit que f est une fonction propre de Δ si Δf est proportionnel à f , c'est-à-dire si $\Delta f = \alpha f$, où α est une constante, qualifiée de valeur propre. C'est le cas des fonctions $\sin(k_n x)$, puisqu'elles vérifient :

$$\Delta[\sin(k_n x)] = \partial^2[\sin(k_n x)] / \partial x^2 = -k_n^2 \sin(k_n x).$$

Ainsi, les solutions de l'équation de d'Alembert pour la corde de longueur L peuvent s'écrire sous la forme :

$$A_1(t) \sin(k_1 x) + A_2(t) \sin(k_2 x) + \dots$$

Une telle somme est un exemple de « séries de Fourier », introduites par Joseph Fourier en 1822, mais dont une théorie satisfaisante n'a vu le jour qu'un siècle plus tard, grâce aux premiers concepts de l'analyse fonctionnelle et à une théorie de l'intégration plus puissante que la précédente. Les séries de Fourier ont d'ailleurs donné naissance à plusieurs branches de l'analyse : l'analyse harmonique, la théorie du signal, celle des ondelettes, etc.

Ces considérations se généralisent à des espaces ou des domaines de dimension supérieure à 1 et permettent d'étudier les vibrations de la peau d'un tambour, d'une plaque métallique, d'un solide plein, etc. En dimension 3, l'équation des ondes de faible amplitude, sans forçage extérieur et limitées à un domaine borné de l'espace, s'écrit ainsi :

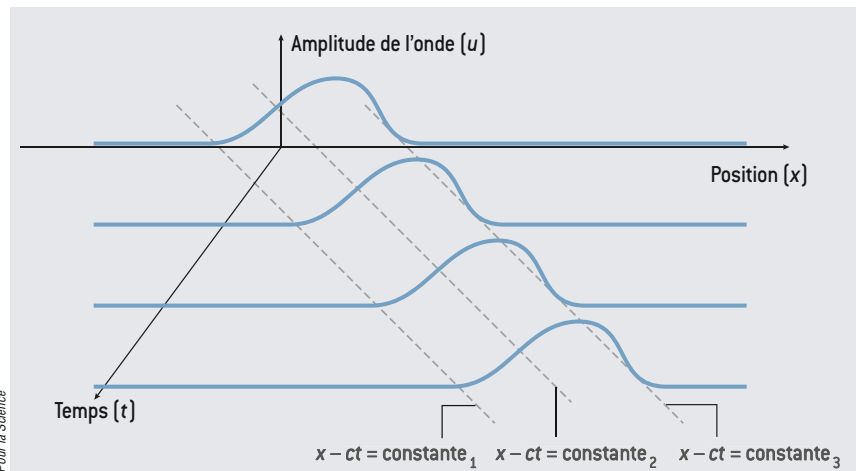
$$\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \Delta u = 0,$$

où le laplacien est défini par :

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2.$$

Comme en dimension 1, on recherche un ensemble adéquat de fonctions propres $f_n(x, y, z)$ telles que $\Delta f_n = \alpha_n f_n$, où les α_n sont les valeurs propres et où les fonctions f_n vérifient les conditions aux limites imposées. Les solutions possibles de l'équation des ondes sont alors des sommes $A_1(t) f_1(x, y, z) + A_2(t) f_2(x, y, z) + \dots$, où les $A_n(t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps, avec des pulsations ω_n données par les valeurs propres ($\omega_n^2 = -c^2 \alpha_n$). Chaque des termes représente un « mode propre d'oscillation » du système et le « spectre » désigne l'ensemble des fréquences possibles.

Soulignons que les fonctions et valeurs propres du laplacien dépendent de la géométrie du problème. La détermination des valeurs propres (le spectre) et l'analyse de leur relation avec cette géométrie ont de nombreuses applications, par exemple à l'étude des instruments de



4. L'ÉQUATION DE D'ALEMBERT pour les ondes à une dimension a des solutions de la forme $u(x, t) = f(x - ct)$, où f est n'importe quelle fonction d'une seule variable. Une telle solution représente une onde qui se propage sans se déformer à la vitesse c dans le sens positif sur l'axe Ox .

musique, mais aussi au contrôle non destructif, à la physique quantique, à la théorie des nombres, etc.

Une autre remarque concerne le cas où il existe un forçage extérieur (une source extérieure). Cette situation est plus compliquée, mais l'analyse en modes propres reste indispensable et sert de base pour déterminer le comportement du système et étudier les phénomènes de résonance notamment, comme on l'a expliqué plus haut en dimension 1.

Propagation dans un espace ouvert

Dans ce qui précède, le fait que les oscillations se développent dans un domaine borné (sur une longueur L dans le cas de la corde) est essentiel. C'est une contrainte forte sur les fonctions et vecteurs propres du laplacien, et elle détermine une infinité dénombrable (non continue) de modes d'oscillation.

Que se passe-t-il par exemple pour une corde vibrante de longueur infinie ? La recherche de solutions à variables séparées conduit dans ce cas à des solutions du type $A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi)$, où $k = \omega/c$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle. On a donc une infinité continue de solutions particulières, et un spectre continu de fréquences.

Dans cette situation, les solutions plus générales de l'équation de la corde vibrante ne sont pas des séries de Fourier (des sommes dénombrables de fonctions sinusoïdales), mais des intégrales de Fourier (des sommes continues de fonctions sinusoïda-

les). L'étude de l'équation des ondes peut être alors effectuée en écrivant sous forme d'intégrales les fonctions recherchées. Cette technique, la transformation de Fourier, s'adapte à de très nombreux problèmes.

Pour la corde vibrante, un calcul simple montre directement un résultat intéressant. On remarque en effet que toute fonction $u(x, t)$ de la forme $f(x - ct)$ ou $g(x + ct)$, où f et g sont des fonctions quelconques d'une seule variable, vérifie a priori l'équation des ondes $\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \partial^2 u / \partial x^2 = 0$. Or $f(x - ct)$ représente une onde qui se propage sans se déformer vers la droite à la vitesse c , tandis que $g(x + ct)$ représente une onde qui se propage sans se déformer à la vitesse $-c$, c'est-à-dire vers la gauche à la vitesse $+c$ (voir la figure 3). La solution générale de l'équation de la corde vibrante est alors une superposition $f(x - ct) + g(x + ct)$ de ces deux ondes voyageant en sens opposés, que l'on peut en principe déterminer complètement si l'on connaît la position et la vitesse de tous les points de la corde à un instant initial.

L'exemple simple de la corde vibrante a mis en évidence deux comportements liés à la notion d'onde : les oscillations dans le cas d'un domaine borné, et la propagation dans le cas d'un domaine infini. Nous avons jusqu'ici considéré l'équation de d'Alembert, qui s'applique à la corde vibrante et à de nombreux autres systèmes. Mais il existe d'autres types d'équations d'onde : l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, l'équation d'Airy qui intervient dans l'étude des caustiques (concentrations de lumière), l'équation de la vibration des poutres, etc. Les trois exemples cités sont des

Ondes, rayons et trajectoires

Comment se comportent les ondes lorsque les fréquences qui les décrivent sont très élevées ? Cette question relève de ce qu'on appelle l'analyse asymptotique, où l'on étudie mathématiquement le comportement d'un système lorsqu'un ou plusieurs de ses paramètres tendent vers des limites intéressantes.

Le cas où la fréquence tend vers l'infini est intéressant notamment parce qu'il concerne les ondes lumineuses. Les fréquences des ondes sinusoïdales permettant de décrire la lumière sont en effet extrêmement élevées : autour de 10^{14} - 10^{15} hertz, c'est-à-dire autant de cycles d'oscillation du champ électromagnétique par seconde.

Le comportement des ondes à haute fréquence a occupé de nombreux mathématiciens au XX^e siècle. L'une des contributions majeures est celle du chercheur suédois Lars Hörmander (médaille Fields en 1962), avec ses travaux sur l'« analyse microlocale ». L'étude mathématique de la limite des hautes fréquences a justifié de façon rigoureuse le fait que les ondes lumineuses peuvent être considérées comme des rayons si la taille des obstacles est grande par rapport à la longueur d'onde, cette dernière étant d'autant plus courte que la fréquence est élevée. Les lois de l'optique géométrique, dues à Snell et Descartes, ont ainsi reçu une explication satisfaisante, et des résultats qua-

litatifs, utiles pour les applications aux radars, aux images de synthèse, etc., sont systématiquement utilisés aujourd'hui.

Un autre exemple important d'analyse asymptotique des ondes est l'étude de l'équation de Schrödinger (une équation fondamentale de la mécanique quantique) quand la constante de Planck h (dont la valeur réelle est petite) tend vers 0. De nombreux travaux mathématiques ont porté sur cette limite dite semi-classique, et ont permis de préciser dans quel sens le fait de faire tendre h vers 0 permet de retrouver les lois de la mécanique classique, et notamment les trajectoires qui n'existent qu'en mécanique classique.

plus variées et plus compliquées à analyser, mais elles rendent compte de phénomènes singuliers tels que les ondes de choc (par exemple lorsqu'un avion franchit le mur du son), qui correspondent à des solutions présentant des discontinuités.

Un autre phénomène intéressant décrit par certaines équations non linéaires est l'existence d'« ondes solitaires » ou « solitons » : des perturbations localisées qui se propagent sans déformation sur de longues distances, et dont les mascarets et les tsunamis sont des exemples (voir l'article Les vagues en équations dans ce numéro). Les solitons correspondent à des ondes où l'effet de la dispersion est compensé par celui des non-linéarités.

L'étude mathématique des différentes équations d'onde, qu'elles soient linéaires ou non, qu'elles fassent apparaître ou non de la dispersion, est d'une grande richesse et continue à susciter l'invention de concepts et techniques adaptés. Il est rare que des solutions exactes et explicites puissent être trouvées aux équations. Cela arrive tout de même, notamment avec des équations dites intégrables telles que l'équation de Korteweg-de Vries, et une telle propriété révèle souvent des liens avec des domaines mathématiques *a priori* éloignés.

Un univers foisonnant

Sinon, des calculs approchés sont réalisables et utiles, tant pour l'étude mathématique des problèmes que pour leur interprétation physique. L'analyse dite asymptotique, qui examine ce qui se passe quand certains paramètres ou certaines grandeurs tendent vers des limites données, entre aussi dans ce cadre. Ainsi, l'étude de la limite des hautes fréquences, réalisée au XX^e siècle, justifie le fait que les ondes lumineuses peuvent, dans les situations courantes, être assimilées à des rayons décrits par l'optique géométrique (voir l'encadré ci-dessus).

L'univers des ondes est un univers foisonnant. Les ondes interviennent sous une forme ou une autre dans presque tous les phénomènes physiques. Liant oscillation et propagation, avec des effets de dispersion et des non-linéarités qui augmentent d'autant leur complexité et leur richesse, elles sont fondamentales pour les physiciens et les ingénieurs. L'étude des ondes a aussi été un stimulant essentiel de plusieurs champs des mathématiques. Elle l'est toujours. ■

équations linéaires, que l'on peut analyser avec la technique des transformations de Fourier. Cela revient à représenter les solutions comme des intégrales (des sommes infinies) d'ondes sinusoïdales.

L'étude de telles équations d'onde, outre leur intérêt propre, met en évidence un phénomène ondulatoire nouveau par rapport à l'équation de d'Alembert : la dispersion. Cela signifie que les ondes sinusoïdales se propagent à des vitesses différentes, en fonction de la fréquence (ou de la longueur d'onde), ce qui n'était pas le cas avec la corde vibrante. Les composantes sinusoïdales d'une onde finissent alors par se séparer au fil du temps. La dispersion explique par exemple la décomposition par un prisme en verre de la lumière blanche, constituée d'ondes lumineuses de nombreuses fréquences. Elle explique aussi qu'une onde de forme initiale très localisée peut se déformer et s'étaler en se propageant, avec une amplitude qui diminue au fil du temps (même s'il n'y a pas dissipation d'énergie).

Par ailleurs, si les amplitudes des ondes ne peuvent pas être considérées comme petites, les équations qui les décrivent sont non linéaires. C'est fréquemment le cas, et les vagues à la surface de l'eau sont un exemple d'ondes non linéaires (décrites par l'équation dite de Korteweg-de Vries lorsque la profondeur peut être considérée comme faible). Du point de vue mathématique, les équations non linéaires sont

✓ BIBLIOGRAPHIE

C. Bardos et M. Zerner, *Équations aux dérivées partielles*, *Encyclopædia Universalis*, 2009.

J. Bruneaux et J. Matricon, *Vibrations, ondes*, Ellipses, 2008.

F. Baskevitch, *Les représentations de la propagation du son, d'Aristote à l'Encyclopédie*, thèse de doctorat, Université de Nantes, 2008.

B. Valeur, *Lumière et luminescence*, Belin-Pour la Science, 2005.

R. Knobel, *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*, American Mathematical Society, 2000.

G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, 1974.