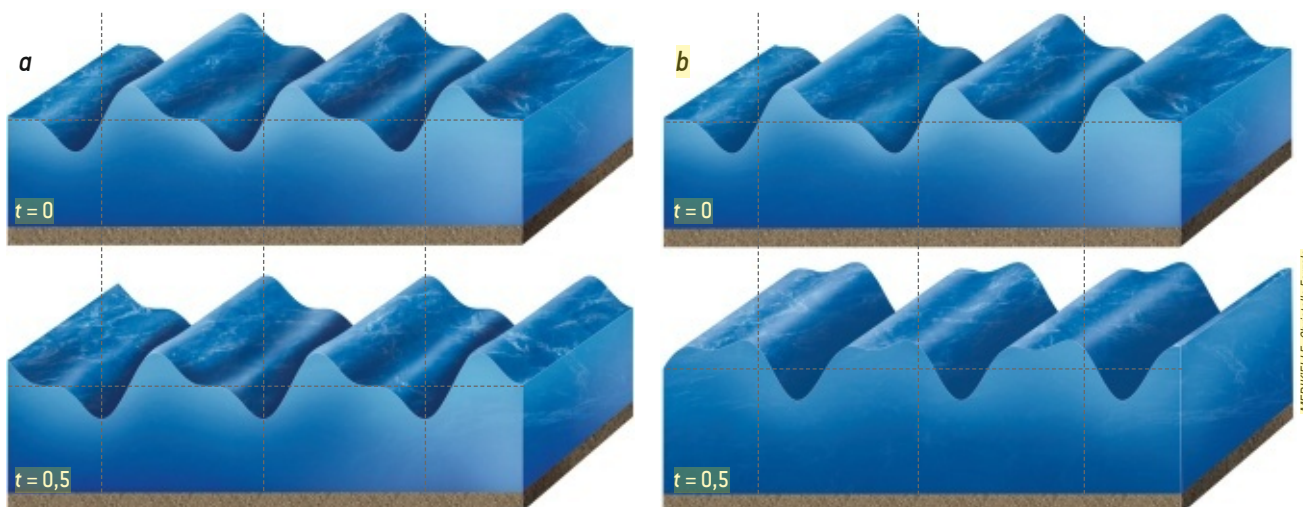




2. DES VAGUES NON SINUSOÏDALES ne se déforment pas en se propageant, selon l'analyse de Lagrange [a]. La configuration initiale des vagues est ici de la forme $\sin x + 0,5 \sin 2x$, ce qui correspond à la superposition de deux vagues sinusoïdales de longueurs d'onde différentes.

Selon le résultat de Newton, les deux composantes sinusoïdales ont une vitesse de propagation différente, ce qui entraîne une déformation des vagues au cours du temps [b]. (Les paramètres choisis ici pour calculer les profils des vagues sont $g = 10$ et $H = 0,1$, de sorte que $gH = 1$.)

vagues, des solutions approchées qui dépendent de façon polynomiale de la coordonnée verticale z . Cette structure polynomiale simplifie beaucoup les équations et, après quelques calculs, Lagrange put affirmer que « la vitesse de la propagation des ondes sera celle qu'un corps grave acquerrait en tombant de la moitié de la hauteur de l'eau dans le canal ». Autrement dit, le mathématicien français affirmait que la vitesse de propagation des vagues est égale à $\sqrt{gH}$, où g désigne l'accélération de la pesanteur et H la hauteur de l'eau au repos.

Remarquons tout de suite que la vitesse $c_L = \sqrt{gH}$ trouvée par Lagrange ne dépend pas de la longueur d'onde; le résultat de Lagrange contredit donc celui de Newton de façon flagrante ! Pourtant, Lagrange et Newton avaient tous deux raison (et tous deux un peu tort aussi) : comme nous le verrons, ces deux résultats constituent deux cas extrêmes d'une seule et même théorie. C'est surprenant, les deux résultats étant qualitativement très différents.

Pour bien s'en rendre compte, concentrons-nous sur le cas de vagues unidimensionnelles (c'est-à-dire qui ne varient pas selon l'une des deux directions horizontales). Prenons par exemple une vague qui, à l'instant initial, est une sinusoïde de longueur d'onde λ ; sa forme est donc décrite par le graphe d'une fonction de la forme $a_0(x) = A \cos kx$, où $k = 2\pi/\lambda$.

Selon Newton, elle devrait se déplacer à la vitesse $c_N = \sqrt{g/k}$. À l'instant t ,

son profil devrait donc correspondre au graphe de la fonction :

$$a(x, t) = A \cos k(x - c_N t).$$

Selon Lagrange, cette même vague est donnée au même instant par :

$$a(x, t) = A \cos k(x - c_L t).$$

Elle n'est donc pas au même endroit (sauf dans le cas particulier où $c_N = c_L$, c'est-à-dire où $Hk = 1$, soit $H = \lambda/2\pi$), même si sa forme spatiale est identique.

On peut mettre le doigt sur la différence majeure entre le résultat de Newton et celui de Lagrange en considérant une

Selon Newton, les vagues se déforment en se propageant. Ce n'est pas le cas selon l'analyse de Lagrange.

superposition de telles ondes simples. Prenons ainsi une perturbation initiale qui est la somme de deux oscillations de longueurs d'onde différentes. Pour Lagrange, ces deux composantes se déplacent à la même vitesse, et la vague n'est pas déformée. Pour Newton, en revanche, les deux composantes évoluent à des vitesses différentes, ce qui induit une déformation de la vague (voir la figure 2).

On peut pousser plus loin ce raisonnement. Grâce à la « transformation de Fou-

rier », opération mathématique issue des travaux de Joseph Fourier, au XIX^e siècle, on peut assimiler toute perturbation localisée de la surface du fluide à une somme infinie d'ondes sinusoïdales de longueurs d'onde différentes. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors que, selon la théorie de Lagrange, cette perturbation localisée se propage sans se déformer. Avec la théorie de Newton, on a de nouveau une configuration différente; non seulement la vague se déforme, mais on peut aussi montrer qu'elle s'aplatit avec une amplitude maximale qui décroît comme $1/\sqrt{t}$. L'incompatibilité des deux approches n'en est que plus frappante.

Cette petite analyse souligne ainsi l'une des conséquences frappantes de l'interdépendance de la vitesse de propagation et de la longueur d'onde. Cette interdépendance constitue un phénomène très général, nommé dispersion. Newton n'avait d'ailleurs certainement pas été trop surpris de le voir apparaître. En effet, il avait déjà mis en évidence le phénomène de dispersion dans un tout autre contexte avec ses célèbres expériences sur les prismes : c'est précisément parce que la vitesse d'une onde lumineuse dans le verre dépend de sa longueur d'onde que la lumière blanche se décompose à la traversée d'un prisme (voir la figure 3).

Avant d'entrer davantage dans les détails et d'expliquer les raisons des différences entre les approches de Newton et de Lagrange, examinons quelques phé-