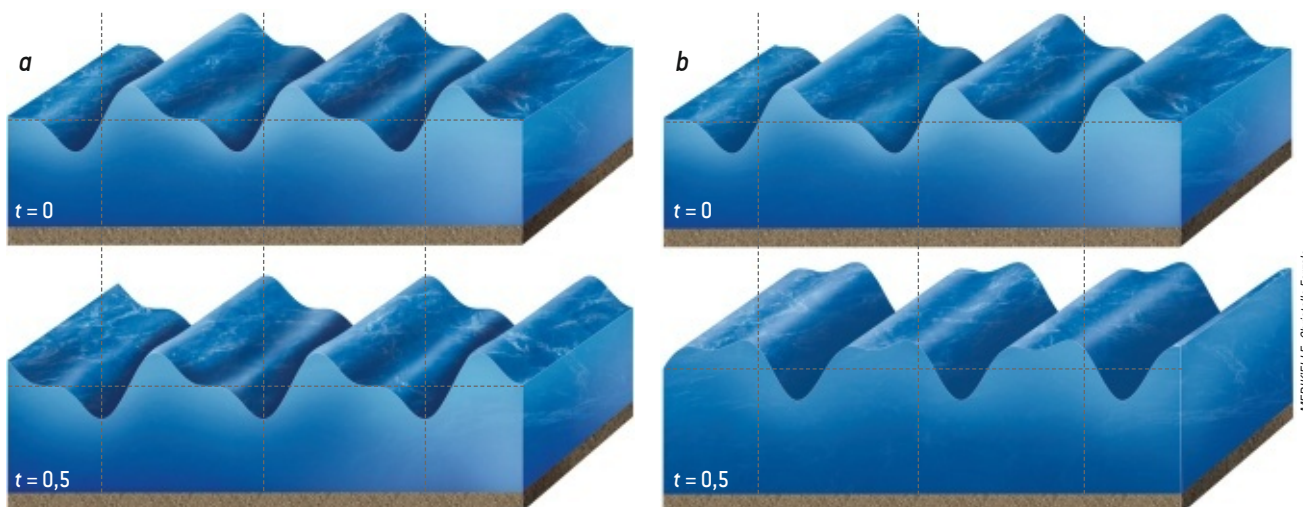




2. DES VAGUES NON SINUSOÏDALES ne se déforment pas en se propageant, selon l'analyse de Lagrange [a]. La configuration initiale des vagues est ici de la forme $\sin x + 0,5 \sin 2x$, ce qui correspond à la superposition de deux vagues sinusoïdales de longueurs d'onde différentes.

Selon le résultat de Newton, les deux composantes sinusoïdales ont une vitesse de propagation différente, ce qui entraîne une déformation des vagues au cours du temps [b]. (Les paramètres choisis ici pour calculer les profils des vagues sont $g = 10$ et $H = 0,1$, de sorte que $gH = 1$.)

vagues, des solutions approchées qui dépendent de façon polynomiale de la coordonnée verticale z . Cette structure polynomiale simplifie beaucoup les équations et, après quelques calculs, Lagrange put affirmer que « la vitesse de la propagation des ondes sera celle qu'un corps grave acquerrait en tombant de la moitié de la hauteur de l'eau dans le canal ». Autrement dit, le mathématicien français affirmait que la vitesse de propagation des vagues est égale à $\sqrt{gH}$, où g désigne l'accélération de la pesanteur et H la hauteur de l'eau au repos.

Remarquons tout de suite que la vitesse $c_L = \sqrt{gH}$ trouvée par Lagrange ne dépend pas de la longueur d'onde; le résultat de Lagrange contredit donc celui de Newton de façon flagrante ! Pourtant, Lagrange et Newton avaient tous deux raison (et tous deux un peu tort aussi) : comme nous le verrons, ces deux résultats constituent deux cas extrêmes d'une seule et même théorie. C'est surprenant, les deux résultats étant qualitativement très différents.

Pour bien s'en rendre compte, concentrons-nous sur le cas de vagues unidimensionnelles (c'est-à-dire qui ne varient pas selon l'une des deux directions horizontales). Prenons par exemple une vague qui, à l'instant initial, est une sinusoïde de longueur d'onde λ ; sa forme est donc décrite par le graphe d'une fonction de la forme $a_0(x) = A \cos kx$, où $k = 2\pi/\lambda$.

Selon Newton, elle devrait se déplacer à la vitesse $c_N = \sqrt{g/k}$. À l'instant t ,

son profil devrait donc correspondre au graphe de la fonction :

$$a(x, t) = A \cos k(x - c_N t).$$

Selon Lagrange, cette même vague est donnée au même instant par :

$$a(x, t) = A \cos k(x - c_L t).$$

Elle n'est donc pas au même endroit (sauf dans le cas particulier où $c_N = c_L$, c'est-à-dire où $Hk = 1$, soit $H = \lambda/2\pi$), même si sa forme spatiale est identique.

On peut mettre le doigt sur la différence majeure entre le résultat de Newton et celui de Lagrange en considérant une

Selon Newton, les vagues se déforment en se propageant. Ce n'est pas le cas selon l'analyse de Lagrange.

superposition de telles ondes simples. Prenons ainsi une perturbation initiale qui est la somme de deux oscillations de longueurs d'onde différentes. Pour Lagrange, ces deux composantes se déplacent à la même vitesse, et la vague n'est pas déformée. Pour Newton, en revanche, les deux composantes évoluent à des vitesses différentes, ce qui induit une déformation de la vague (voir la figure 2).

On peut pousser plus loin ce raisonnement. Grâce à la « transformation de Fou-

rier », opération mathématique issue des travaux de Joseph Fourier, au XIX^e siècle, on peut assimiler toute perturbation localisée de la surface du fluide à une somme infinie d'ondes sinusoïdales de longueurs d'onde différentes. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors que, selon la théorie de Lagrange, cette perturbation localisée se propage sans se déformer. Avec la théorie de Newton, on a de nouveau une configuration différente; non seulement la vague se déforme, mais on peut aussi montrer qu'elle s'aplatit avec une amplitude maximale qui décroît comme $1/\sqrt{t}$. L'incompatibilité des deux approches n'en est que plus frappante.

Cette petite analyse souligne ainsi l'une des conséquences frappantes de l'interdépendance de la vitesse de propagation et de la longueur d'onde. Cette interdépendance constitue un phénomène très général, nommé dispersion. Newton n'avait d'ailleurs certainement pas été trop surpris de le voir apparaître. En effet, il avait déjà mis en évidence le phénomène de dispersion dans un tout autre contexte avec ses célèbres expériences sur les prismes : c'est précisément parce que la vitesse d'une onde lumineuse dans le verre dépend de sa longueur d'onde que la lumière blanche se décompose à la traversée d'un prisme (voir la figure 3).

Avant d'entrer davantage dans les détails et d'expliquer les raisons des différences entre les approches de Newton et de Lagrange, examinons quelques phé-

nomènes naturels et essayons de voir s'ils sont de nature dispersive (Newton) ou non dispersive (Lagrange).

On constate par exemple que les tsunamis sont de nature non dispersive. En effet, de telles vagues, créées au large par un tremblement de terre, se déforment très peu en pleine mer; elles se propagent donc à la vitesse $c_L = \sqrt{gH}$ (soit un peu plus de 700 kilomètres par heure pour un océan profond de 4 000 mètres). Et tout comme les tsunamis, le comportement des vagues lorsqu'elles s'approchent de la côte est décrit par la théorie de Lagrange plutôt que par celle de Newton.

La théorie de Newton s'applique cependant à de nombreuses situations. Prenons-en une particulièrement intéressante, puisqu'elle fait écho aux expériences de Newton sur la décomposition de la lumière blanche. Lorsqu'une tempête crée des vagues au milieu de l'océan, celles-ci sont complètement chaotiques; pourtant, lorsque la houle qui en résulte s'approche du rivage, elle est bien régulière. C'est la dispersion qui est responsable de cette transformation. Voyons pourquoi.

Les vagues longues sont plus rapides

Les vagues chaotiques créées par la tempête sont comme la lumière blanche, elles contiennent des ondes de longueurs d'onde très variées, qui traversent l'océan à des vitesses différentes. L'océan joue donc le même rôle qu'un prisme pour les ondes lumineuses: il sépare les différentes longueurs d'onde. En arrivant sur une lointaine côte, les vagues de plus grandes longueurs d'onde, les plus rapides, précèdent ainsi de plusieurs heures les ondes de petite longueur d'onde. Pour les ondes lumineuses, la lumière blanche se décompose en différentes composantes colorées. Pour les vagues, le caractère « monochromatique » de la houle après avoir traversé l'océan se traduit par leur grande régularité, qui contraste avec le chaos créé par la tempête.

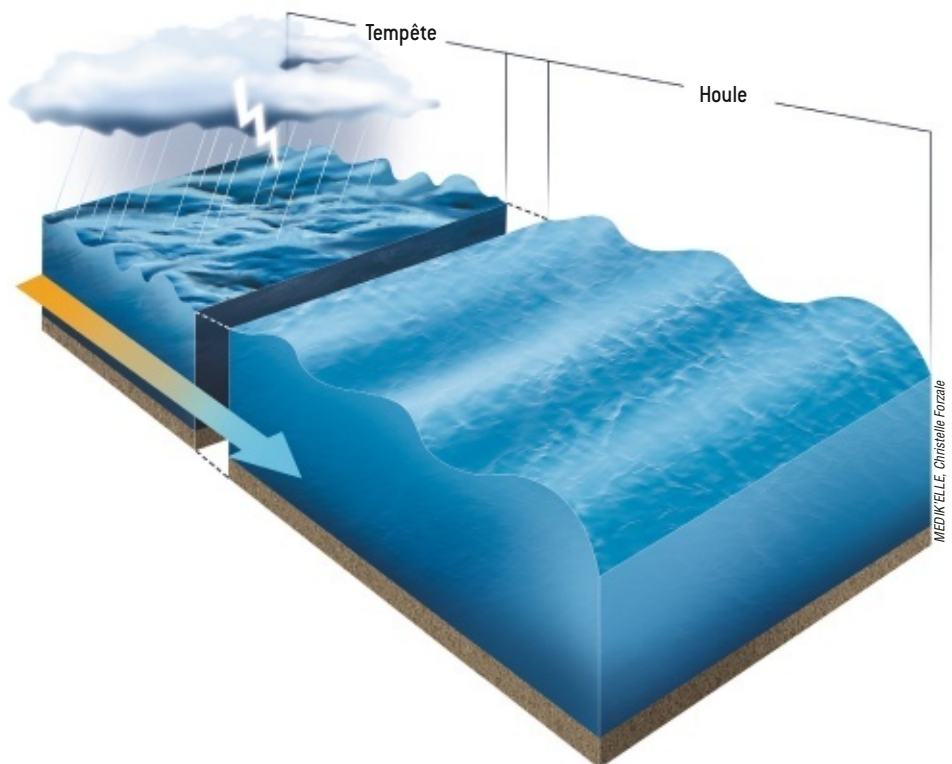
Tâchons maintenant de comprendre pourquoi les approches de Newton et Lagrange sont deux cas extrêmes d'une même théorie. Cette théorie repose sur l'équation d'Euler de l'hydrodynamique (voir l'encadré page 95), qui décrit les mouvements d'un fluide incompressible et de viscosité négligeable. Moyennant quelques transformations et certaines approxi-

mations (on suppose notamment que l'amplitude des vagues est faible), on aboutit à un système d'équations qui a une solution sinusoïdale $a(x, t) = A \cos k(x - ct)$ à condition que la vitesse c soit donnée par la relation $c^2 = g \tanh(Hk)/k$, où $\tanh$ est la fonction tangente hyperbolique définie par $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$.

Lorsque la profondeur H est petite, $\tanh(Hk)$ est à peu près égal à Hk et on obtient donc $c \approx \sqrt{gH}$, qui est la formule de Lagrange; si, au contraire, la profondeur H est très grande, alors $\tanh(Hk) \approx 1$ et l'on a $c \approx \sqrt{g/k}$. Le résultat de Newton est donc valable en « eau profonde », et celui de Lagrange en « eau peu profonde ». Mais l'exemple des tsunamis montre qu'il faut être très prudent avec cette terminologie, d'où l'emploi des guillemets. Comme on l'a vu, un tsunami qui se propage à la surface d'un océan de 4 000 mètres de profondeur relève en effet de la théorie des vagues en eau *peu* profonde. Le paradoxe n'est qu'apparent. En effet, ce n'est pas H qui doit être petit pour que l'approximation $\tanh(Hk) \approx Hk$ soit valable,

mais Hk , égal à $H2\pi/\lambda$ où l'on rappelle que λ est la longueur d'onde du tsunami. Or cette longueur d'onde est gigantesque, typiquement une centaine de kilomètres, si bien que $Hk \approx 0,25$, valeur qui est effectivement « petite »...

L'analyse que l'on vient de décrire permet de faire le pont entre le résultat de Newton et celui de Lagrange. Elle n'en reste pas moins très rudimentaire. Une première limitation évidente est qu'elle utilise des approximations linéaires, qui conduisent à une expression de la vitesse des vagues indépendante de leur taille. Or il est facile de se convaincre que cela n'est généralement pas le cas: avec une telle propriété,



3. L'AGITATION CRÉÉE PAR UNE TEMPÊTE engendre des vagues de nombreuses longueurs d'onde différentes. Chacune de ces composantes se propageant à une vitesse différente, elles se séparent au bout d'une distance assez grande. Ainsi, loin de la tempête, la mer n'est perturbée localement dans l'espace et le temps que par des vagues d'une seule longueur d'onde: c'est la houle. Cette séparation spatiale en différentes longueurs d'onde est analogue à la dispersion par un prisme des couleurs qui composent la lumière blanche (en haut à droite). La dispersion des couleurs est également due au fait que les ondes lumineuses de longueurs d'onde différentes ont des vitesses distinctes.