

nomènes naturels et essayons de voir s'ils sont de nature dispersive (Newton) ou non dispersive (Lagrange).

On constate par exemple que les tsunamis sont de nature non dispersive. En effet, de telles vagues, créées au large par un tremblement de terre, se déforment très peu en pleine mer; elles se propagent donc à la vitesse $c_L = \sqrt{gH}$ (soit un peu plus de 700 kilomètres par heure pour un océan profond de 4 000 mètres). Et tout comme les tsunamis, le comportement des vagues lorsqu'elles s'approchent de la côte est décrit par la théorie de Lagrange plutôt que par celle de Newton.

La théorie de Newton s'applique cependant à de nombreuses situations. Prenons-en une particulièrement intéressante, puisqu'elle fait écho aux expériences de Newton sur la décomposition de la lumière blanche. Lorsqu'une tempête crée des vagues au milieu de l'océan, celles-ci sont complètement chaotiques; pourtant, lorsque la houle qui en résulte s'approche du rivage, elle est bien régulière. C'est la dispersion qui est responsable de cette transformation. Voyons pourquoi.

Les vagues longues sont plus rapides

Les vagues chaotiques créées par la tempête sont comme la lumière blanche, elles contiennent des ondes de longueurs d'onde très variées, qui traversent l'océan à des vitesses différentes. L'océan joue donc le même rôle qu'un prisme pour les ondes lumineuses: il sépare les différentes longueurs d'onde. En arrivant sur une lointaine côte, les vagues de plus grandes longueurs d'onde, les plus rapides, précèdent ainsi de plusieurs heures les ondes de petite longueur d'onde. Pour les ondes lumineuses, la lumière blanche se décompose en différentes composantes colorées. Pour les vagues, le caractère « monochromatique » de la houle après avoir traversé l'océan se traduit par leur grande régularité, qui contraste avec le chaos créé par la tempête.

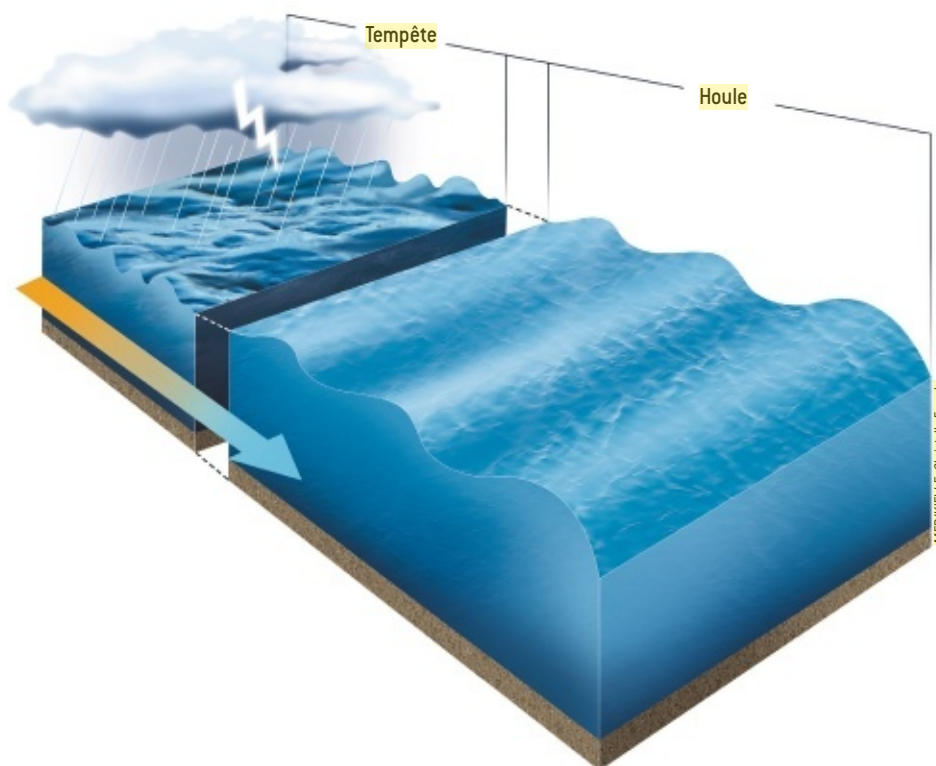
Tâchons maintenant de comprendre pourquoi les approches de Newton et Lagrange sont deux cas extrêmes d'une même théorie. Cette théorie repose sur l'équation d'Euler de l'hydrodynamique (voir l'encadré page 95), qui décrit les mouvements d'un fluide incompressible et de viscosité négligeable. Moyennant quelques transformations et certaines approxi-

mations (on suppose notamment que l'amplitude des vagues est faible), on aboutit à un système d'équations qui a une solution sinusoïdale $a(x, t) = A \cos k(x - ct)$ à condition que la vitesse c soit donnée par la relation $c^2 = g \tanh(Hk)/k$, où $\tanh$ est la fonction tangente hyperbolique définie par $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$.

Lorsque la profondeur H est petite, $\tanh(Hk)$ est à peu près égal à Hk et on obtient donc $c \approx \sqrt{gH}$, qui est la formule de Lagrange; si, au contraire, la profondeur H est très grande, alors $\tanh(Hk) \approx 1$ et l'on a $c \approx \sqrt{g/k}$. Le résultat de Newton est donc valable en « eau profonde », et celui de Lagrange en « eau peu profonde ». Mais l'exemple des tsunamis montre qu'il faut être très prudent avec cette terminologie, d'où l'emploi des guillemets. Comme on l'a vu, un tsunami qui se propage à la surface d'un océan de 4 000 mètres de profondeur relève en effet de la théorie des vagues en eau *peu* profonde. Le paradoxe n'est qu'apparent. En effet, ce n'est pas H qui doit être petit pour que l'approximation $\tanh(Hk) \approx Hk$ soit valable,

mais Hk , égal à $H2\pi/\lambda$ où l'on rappelle que λ est la longueur d'onde du tsunami. Or cette longueur d'onde est gigantesque, typiquement une centaine de kilomètres, si bien que $Hk \approx 0,25$, valeur qui est effectivement « petite »...

L'analyse que l'on vient de décrire permet de faire le pont entre le résultat de Newton et celui de Lagrange. Elle n'en reste pas moins très rudimentaire. Une première limitation évidente est qu'elle utilise des approximations linéaires, qui conduisent à une expression de la vitesse des vagues indépendante de leur taille. Or il est facile de se convaincre que cela n'est généralement pas le cas: avec une telle propriété,



3. L'AGITATION CRÉÉE PAR UNE TEMPÊTE engendre des vagues de nombreuses longueurs d'onde différentes. Chacune de ces composantes se propageant à une vitesse différente, elles se séparent au bout d'une distance assez grande. Ainsi, loin de la tempête, la mer n'est perturbée localement dans l'espace et le temps que par des vagues d'une seule longueur d'onde: c'est la houle. Cette séparation spatiale en différentes longueurs d'onde est analogue à la dispersion par un prisme des couleurs qui composent la lumière blanche (en haut à droite). La dispersion des couleurs est également due au fait que les ondes lumineuses de longueurs d'onde différentes ont des vitesses distinctes.