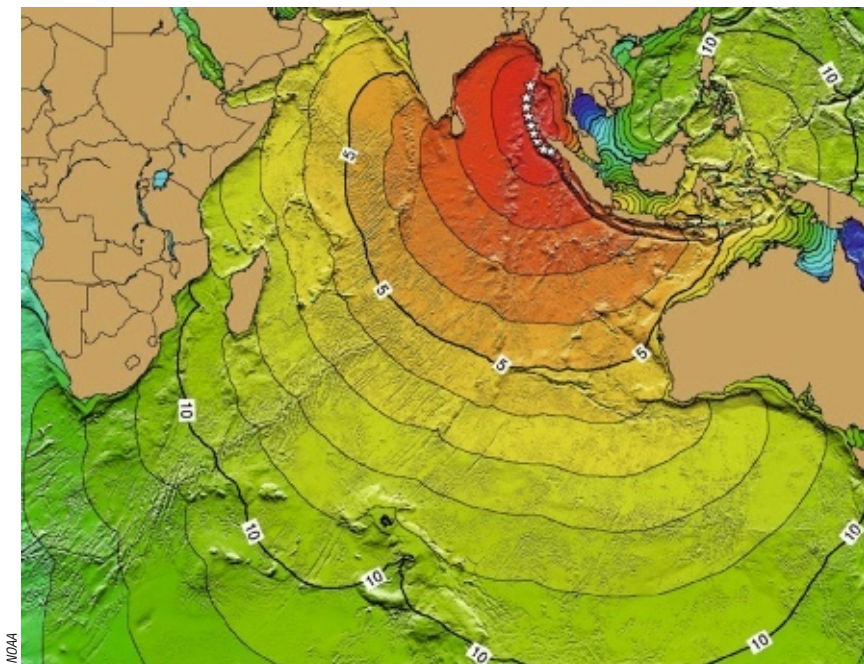




4. LE TSUNAMI DE SUMATRA, le 26 décembre 2004, a été destructeur et a fait plus de 200 000 victimes. Cette carte montre sa propagation, heure par heure. La vitesse d'un tsunami est de l'ordre de 700 kilomètres par heure là où la profondeur de l'océan est de 4 000 mètres. Cela correspond toutefois à un régime de propagation en « eau peu profonde », car les longueurs d'onde en jeu sont très grandes, de l'ordre de la centaine de kilomètres.

on ne peut pas expliquer le déferlement des vagues. Et même sans aller jusque-là, on peut aisément observer que les vagues les plus hautes sont les plus rapides.

En 1834, l'ingénieur naval écossais Scott Russell, qui s'intéressait à la résistance opposée par l'eau à l'avancement des bateaux, fit une observation qui poussa les mathématiciens à aller au-delà de la théorie linéaire. « J'étais en train d'observer le mouvement d'un bateau tiré rapidement le long d'un canal étroit par deux chevaux lorsque celui-ci s'arrêta brusquement – mais non la masse d'eau du canal qui avait été mise en mouvement ; elle s'accumula autour de la proue du navire dans un état d'agitation violente, puis soudainement, laissant le bateau derrière elle, roula au-devant à grande vitesse, prenant la forme d'une grande élévation solitaire ; cette masse d'eau, ronde, lisse et bien définie, continua sa course le long du canal sans changer de forme ou ralentir apparemment. »

De telles grandes « ondes solitaires », ou « solitons », qui se propagent le long d'un canal sans se déformer, devinrent une obsession pour Russell. Il mesura en particulier leur vitesse c et proposa la valeur $\sqrt{gH'}$ avec $H' = H + a_M$, où a_M est l'élévation maximale de la vague par rapport au niveau de l'eau au repos. Cepen-

dant, les plus grands mathématiciens de l'époque ne crurent pas à ses observations.

Pour expliquer l'influence de la taille des vagues sur leur vitesse, le Britannique George Airy proposa en 1841 une généralisation non linéaire de la théorie de Lagrange. Considérant que le potentiel des vitesses (voir l'encadré page ci-contre) varie très peu suivant la verticale en eau peu profonde, et que la pression est donnée au premier ordre d'approximation par la pression hydrostatique, Airy obtint une équation non linéaire (où certains termes mettent en jeu des puissances de la fonction inconnue). Quelques années plus tard, le Français Adhémar Barré de Saint-Venant généralisa son approche en proposant un système d'équations qui porte aujourd'hui son nom et qui fait encore référence en hydraulique.

Conjuguer la non-linéarité...

Il s'agissait bien d'une généralisation de la théorie de Lagrange. En effet, si l'on néglige les termes non linéaires de l'équation d'Airy, on trouve (en dimension 1) que le profil $a(x, t)$ des vagues doit résoudre l'équation :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 0,$$

qui est l'« équation des ondes » se propageant à vitesse c_L , équation qui a exacte-

ment la même forme que celle régissant la propagation de la lumière dans le vide (l'écriture $\frac{\partial a}{\partial t}$ désigne la dérivée de $a(x, t)$ par rapport à t en considérant x constant, $\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$ désigne la dérivée seconde de $a(x, t)$ par rapport à t , etc.).

De cette équation on déduit que toute perturbation de la surface se décompose en deux composantes, l'une se propageant vers la gauche de l'axe Ox , l'autre vers sa droite, toutes deux avec une vitesse $c_L = \sqrt{gH}$. La vague se dirigeant vers la droite, par exemple, obéit à l'« équation de transport » à vitesse c_L , qui s'écrit :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c_L \frac{\partial a}{\partial x} = 0.$$

On a ainsi retrouvé le résultat de Lagrange : la vague voyage à la vitesse $c_L = \sqrt{gH}$. Mais on peut maintenant poursuivre l'analyse en prenant en compte les non-linéarités des équations d'Airy ou de Saint-Venant. En ne retenant que la non-linéarité dominante, on montre que l'équation de transport devient :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c_L (1 + 3a/2H) \frac{\partial a}{\partial x} = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation de transport non linéaire, où la vitesse $c_L (1 + 3a/2H)$ dépend de l'amplitude $a(x, t)$ de la vague. D'observations similaires, Airy avait tiré plusieurs conclusions. L'une d'elles était que la vitesse au sommet de la vague est donnée par $\sqrt{gH} (1 + 3a_M/2H)$, et non par $\sqrt{gH'}$ avec $H' = H + a_M$ comme l'avait suggéré Russell d'après ses mesures.

Une deuxième conclusion était qu'il ne peut y avoir de vague se propageant à vitesse constante sans se déformer, car cela impliquerait que la vitesse $c_L (1 + 3a/2H)$ prend en tout point de la vague la même valeur et donc que la vague est plate ($a = \text{constante}$).

Enfin, une troisième conclusion d'Airy était que toutes les vagues déferlent : comme le haut de la vague se déplace plus vite que le bas, il y aura nécessairement un moment où la partie supérieure passera par-dessus la base de la vague.

Les conclusions d'Airy étaient une grande avancée théorique et même pratique puisqu'elles lui ont permis d'expliquer le phénomène des mascarets, ces vagues liées à la marée qui remontent le cours de certains fleuves. L'onde de marée est très « plate » (sa période est de 12 heures et son amplitude de quelques mètres au plus), mais les non-linéarités la raidissent lorsqu'elle remonte un fleuve, créant ainsi ce phénomène spectaculaire.

Les travaux d'Airy n'ébranlèrent toutefois pas Russell outre mesure. Ce der-

nier maintint que ses « ondes solitaires » se propagent à la vitesse $\sqrt{gH}$, sans se déformer et sans déferler ! Il objecta de plus qu'elles avaient une forme déterminée pour une taille donnée, ce que la théorie d'Airy ne permet pas d'expliquer.

Malgré les efforts de scientifiques brillants, il fallut attendre 1871 pour que le mathématicien français Joseph Boussinesq propose une explication satisfaisante de ce phénomène. L'œuvre de Boussinesq, en particulier son monumental *Essai sur la théorie des eaux courantes*, impressionne par la pertinence et la modernité des idées qui y sont introduites. La prouesse de Boussinesq fut de comprendre que l'hypothèse de pression hydrostatique sous laquelle sont obtenues les équations de Saint-Venant n'est pas toujours satisfaite. Dans certaines conditions, des effets non hydrostatiques réintroduisent de la dispersion dans les équations – rappelons que nous sommes en eau peu profonde, où s'applique la théorie non dispersive de Lagrange (par opposition à la théorie dispersive de Newton).

D'où viennent les termes dispersifs négligés par Airy ? Comme on l'a vu plus haut, le caractère non dispersif de la propagation des vagues en eau peu profonde provient d'une approximation ($c \approx \sqrt{gH}$) de la formule $c^2 = g \tanh(Hk)/k$, trouvée pour la vitesse des ondes de faibles amplitudes. En utilisant une approximation plus précise, on obtient une vitesse c qui dépend de k (donc de la longueur d'onde), ce qui réintroduit l'effet de dispersion.

... et la dispersion

Compte tenu de cet effet de dispersion, on montre que l'équation de transport devient :

$$\partial a / \partial t + c_L (1 + 3a/2H) \partial a / \partial x + B \partial^3 a / \partial x^3 = 0, \text{ où } B = c_L H^2 / 6.$$

Cette équation aujourd'hui célèbre est l'équation de Korteweg-de Vries, du nom des deux savants hollandais qui l'ont redécouverte près de 20 ans après Boussinesq... Elle permet (enfin !) d'expliquer correctement les observations de Russell. Qualitativement, cela se comprend assez bien. On

a vu que la dispersion fait tendre l'amplitude des ondes vers zéro (puisque ses composantes se séparent en se déplaçant à des vitesses différentes) ; inversement, la non-linéarité tend à raidir les vagues et à les faire déferler. La présence simultanée de ces deux phénomènes contradictoires neutralise leurs effets et permet à la vague de se propager sans se déformer.

Plus précisément, on montre que l'équation de Korteweg-de Vries admet des solutions de la forme $a(x, t) = f(x - c_0 t)$, où f est une fonction d'une seule variable, qui représentent une onde se propageant sans déformation à une vitesse constante c_0 . Ces solutions, que l'on peut calculer explicitement, sont conformes aux observations de Russell : leur forme dépend de leur amplitude, et leur vitesse est donnée par $c_0 = \sqrt{gH} (1 + a_M/2H)$, qui est une très bonne approximation de la formule $\sqrt{gH'}$ (avec $H' = H + a_M$) conjecturée par Russell.

Cette longue description historique a permis d'introduire les concepts clefs de

LES ÉQUATIONS DES VAGUES

On choisit un axe vertical Oz de façon que $z = 0$ coïncide avec la surface du liquide au repos. On suppose le fond plat et situé à la profondeur $z = -H$, et l'on note $a(x, y, t)$ la hauteur à un instant t d'un point de la surface ayant pour coordonnées horizontales x et y .

On considère une particule de fluide de volume infinitésimal dV occupant la position $M(t)$ au temps t . Soit $\mathbf{u}(M(t), t)$ le vecteur vi-

tesse de cette particule au temps t , qui a pour composantes u_x, u_y et u_z . On montre que son accélération (la dérivée de la vitesse par rapport au temps) s'écrit :

$\mathbf{du}/dt = \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, équation vectorielle où ∇ est l'opérateur ayant pour composantes $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$ (à une dimension, par exemple, $\mathbf{du}/dt = \partial \mathbf{u} / \partial t + u_x \partial \mathbf{u} / \partial x$).

Si ρ désigne la densité du fluide, la masse de la particule est

ρdV . D'après la deuxième loi de Newton, $\rho dV \mathbf{du}/dt$ doit être égal à la somme des forces extérieures appliquées à la particule, c'est-à-dire ici son poids $\rho dV \mathbf{g}$ (où $\mathbf{g}$ est le vecteur accélération de la pesanteur) et la force de pression (égale à $-\nabla P$, où P est le champ de pression) exercée par le fluide qui entoure la particule. On obtient ainsi l'« équation d'Euler » :

$$(1) \quad \rho [\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = \rho \mathbf{g} - \nabla P.$$

On suppose de plus que le fluide est incompressible et irrotationnel (pas de tourbillons) ; Euler avait déjà remarqué que ces hypothèses se traduisent élégamment par :

(2) $\mathbf{u} = -\nabla \phi$ et $\Delta \phi = 0$, où ϕ est une fonction appelée « potentiel des vitesses » et où $\Delta \phi = \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2$. L'équation $\Delta \phi = 0$ est l'« équation de Laplace ».

Les équations (1) et (2) sont posées à l'intérieur du fluide. Il faut aussi préciser le comportement du fluide aux bords, en l'occurrence au fond, à l'infini en direction horizontale et à la surface. Ces conditions sont les suivantes :

(3) $u_z = 0$ en $z = -H$;
(4) $\mathbf{u}$ s'annule à l'infini ;
(5) À la surface, la pression P est constante et l'expression $\partial a / \partial t + [1 + (\partial a / \partial x)^2 + (\partial a / \partial y)^2]^{1/2} u_N$, où u_N est la vitesse perpendiculaire à la surface, est nulle (cette équation traduit le fait que les particules de fluide qui sont à la surface y restent).

L'ensemble des équations (1), (2), (3), (4) et (5) constitue les équations des vagues.

