

nier maintint que ses « ondes solitaires » se propagent à la vitesse $\sqrt{gH'}$, sans se déformer et sans déferler ! Il objecta de plus qu'elles avaient une forme déterminée pour une taille donnée, ce que la théorie d'Airy ne permet pas d'expliquer.

Malgré les efforts de scientifiques brillants, il fallut attendre 1871 pour que le mathématicien français Joseph Boussinesq propose une explication satisfaisante de ce phénomène. L'œuvre de Boussinesq, en particulier son monumental *Essai sur la théorie des eaux courantes*, impressionne par la pertinence et la modernité des idées qui y sont introduites. La prouesse de Boussinesq fut de comprendre que l'hypothèse de pression hydrostatique sous laquelle sont obtenues les équations de Saint-Venant n'est pas toujours satisfaite. Dans certaines conditions, des effets non hydrostatiques réintroduisent de la dispersion dans les équations – rappelons que nous sommes en eau peu profonde, où s'applique la théorie non dispersive de Lagrange (par opposition à la théorie dispersive de Newton).

D'où viennent les termes dispersifs négligés par Airy ? Comme on l'a vu plus haut, le caractère non dispersif de la propagation des vagues en eau peu profonde provient d'une approximation ($c \approx \sqrt{gH}$) de la formule $c^2 = g \tanh(Hk)/k$, trouvée pour la vitesse des ondes de faibles amplitudes. En utilisant une approximation plus précise, on obtient une vitesse c qui dépend de k (donc de la longueur d'onde), ce qui réintroduit l'effet de dispersion.

... et la dispersion

Compte tenu de cet effet de dispersion, on montre que l'équation de transport devient :

$$\partial a / \partial t + c_L (1 + 3a/2H) \partial a / \partial x + B \partial^3 a / \partial x^3 = 0, \text{ où } B = c_L H^2 / 6.$$

Cette équation aujourd'hui célèbre est l'équation de Korteweg-de Vries, du nom des deux savants hollandais qui l'ont redécouverte près de 20 ans après Boussinesq... Elle permet (enfin !) d'expliquer correctement les observations de Russell. Qualitativement, cela se comprend assez bien. On

a vu que la dispersion fait tendre l'amplitude des ondes vers zéro (puisque ses composantes se séparent en se déplaçant à des vitesses différentes) ; inversement, la non-linéarité tend à raidir les vagues et à les faire déferler. La présence simultanée de ces deux phénomènes contradictoires neutralise leurs effets et permet à la vague de se propager sans se déformer.

Plus précisément, on montre que l'équation de Korteweg-de Vries admet des solutions de la forme $a(x, t) = f(x - c_0 t)$, où f est une fonction d'une seule variable, qui représentent une onde se propageant sans déformation à une vitesse constante c_0 . Ces solutions, que l'on peut calculer explicitement, sont conformes aux observations de Russell : leur forme dépend de leur amplitude, et leur vitesse est donnée par $c_0 = \sqrt{gH} (1 + a_M/2H)$, qui est une très bonne approximation de la formule $\sqrt{gH'}$ (avec $H' = H + a_M$) conjecturée par Russell.

Cette longue description historique a permis d'introduire les concepts clefs de

LES ÉQUATIONS DES VAGUES

On choisit un axe vertical Oz de façon que $z = 0$ coïncide avec la surface du liquide au repos. On suppose le fond plat et situé à la profondeur $z = -H$, et l'on note $a(x, y, t)$ la hauteur à un instant t d'un point de la surface ayant pour coordonnées horizontales x et y .

On considère une particule de fluide de volume infinitésimal dV occupant la position $M(t)$ au temps t . Soit $\mathbf{u}(M(t), t)$ le vecteur vi-

tesse de cette particule au temps t , qui a pour composantes u_x, u_y et u_z . On montre que son accélération (la dérivée de la vitesse par rapport au temps) s'écrit :

$\mathbf{du}/dt = \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, équation vectorielle où ∇ est l'opérateur ayant pour composantes $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$ (à une dimension, par exemple, $\mathbf{du}/dt = \partial \mathbf{u} / \partial t + u_x \partial \mathbf{u} / \partial x$).

Si ρ désigne la densité du fluide, la masse de la particule est

ρdV . D'après la deuxième loi de Newton, $\rho dV \mathbf{du}/dt$ doit être égal à la somme des forces extérieures appliquées à la particule, c'est-à-dire ici son poids $\rho dV \mathbf{g}$ (où $\mathbf{g}$ est le vecteur accélération de la pesanteur) et la force de pression (égale à $-\nabla P$, où P est le champ de pression) exercée par le fluide qui entoure la particule. On obtient ainsi l'« équation d'Euler » :

$$(1) \quad \rho [\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = \rho \mathbf{g} - \nabla P.$$

On suppose de plus que le fluide est incompressible et irrotationnel (pas de tourbillons) ; Euler avait déjà remarqué que ces hypothèses se traduisent élégamment par :

(2) $\mathbf{u} = -\nabla \phi$ et $\Delta \phi = 0$, où ϕ est une fonction appelée « potentiel des vitesses » et où $\Delta \phi = \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2$. L'équation $\Delta \phi = 0$ est l'« équation de Laplace ».

Les équations (1) et (2) sont posées à l'intérieur du fluide. Il faut aussi préciser le comportement du fluide aux bords, en l'occurrence au fond, à l'infini en direction horizontale et à la surface. Ces conditions sont les suivantes :

(3) $u_z = 0$ en $z = -H$;
(4) $\mathbf{u}$ s'annule à l'infini ;
(5) À la surface, la pression P est constante et l'expression $\partial a / \partial t + [1 + (\partial a / \partial x)^2 + (\partial a / \partial y)^2]^{1/2} u_N$, où u_N est la vitesse perpendiculaire à la surface, est nulle (cette équation traduit le fait que les particules de fluide qui sont à la surface y restent).

L'ensemble des équations (1), (2), (3), (4) et (5) constitue les équations des vagues.

