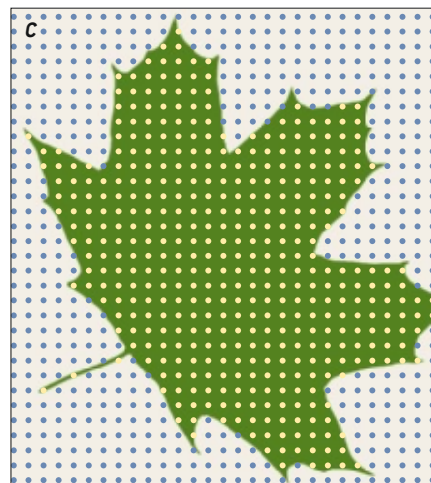
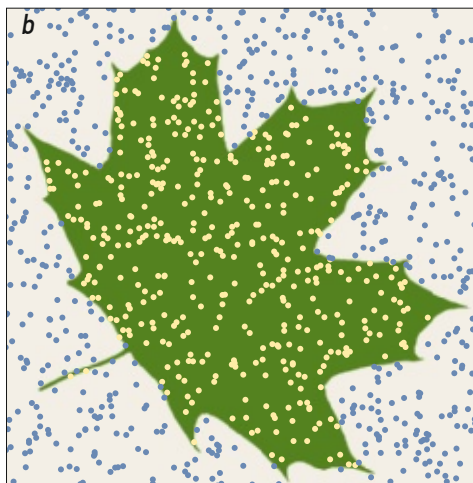
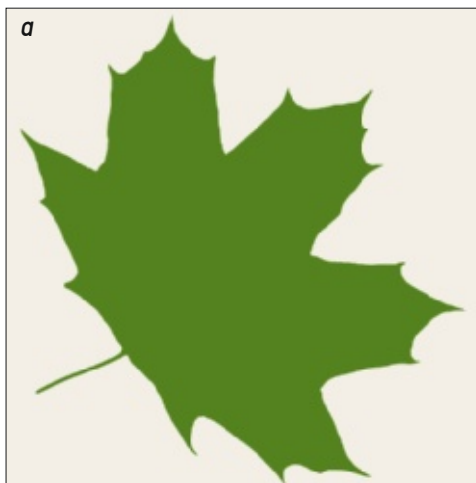




2. ESTIMER LA SUPERFICIE d'une forme complexe, ici une feuille d'érable, est une application classique de la méthode de Monte Carlo. L'image de la feuille est inscrite dans un carré dont on peut considérer que la superficie vaut 1 (a). Le principe de base est de saupoudrer des points dans le carré et de compter combien tombent sur la feuille (en jaune) et en dehors (en bleu). Le rapport du nombre de points gagnants sur le nombre total de points donne une approximation de la superficie de la feuille. La technique de Monte Carlo classique (b) éparpille les points au hasard sur le carré. Une alternative totalement déterministe (c) contraint l'agencement des points en les plaçant sur une grille régulière. La méthode de quasi-Monte Carlo (d) utilise un échantillonnage caractéristique qui vise à atteindre une densité uniforme de points, sans être ni aléatoire ni régulière. Avec un échantillonnage de 1 024 points, les trois méthodes donnent respectivement des estimations de la surface de 0,4189, 0,4209 et 0,4141, qui sont toutes à moins de un pour cent de la valeur réelle 0,4185.

comptant le nombre de « coups gagnants », on a une approximation du rapport des superficies, et l'approximation est d'autant meilleure que N est élevé. Quand N tend vers l'infini, la mesure devient exacte. Ce dernier point n'est pas juste une observation empirique, mais aussi un théorème, qui résulte de la loi des grands nombres. C'est ce même principe qui garantit qu'une pièce non truquée tombera sur face dans la moitié des cas si on la lance un grand nombre de fois (échantillon grand).

Le hasard a un rôle clair dans cette description de la méthode de Monte Carlo. En particulier, l'invocation de la loi des grands nombres suppose que les points de l'échantillon soient choisis au hasard. Et il est facile de voir (juste en regardant une image) pourquoi l'échantillonnage au hasard marche bien : il éparpille les points partout. Ce qui n'est pas si facile à voir, c'est pourquoi d'autres types d'arrangement des points-échantillons ne feraient pas aussi bien l'affaire. Après tout, on pourrait mesurer la superficie de la feuille en posant une grille régulière de points sur le carré et en comptant les coups gagnants. J'ai tenté cette expérience avec mon image de feuille, en plaçant 1 024 points sur une grille 32×32 . J'ai obtenu une estimation de 0,4209, pas tout à fait aussi bonne qu'avec mon tirage aléatoire si chanceux, mais qui s'approche tout de même à 0,6 pour cent près de la véritable superficie.

J'ai également essayé de mesurer la feuille avec 1 024 points quasi-aléatoires, dont l'arrangement est, d'une certaine manière, intermédiaire entre le chaos total et l'ordre total (voir l'encadré page 59). L'estimation obtenue à partir du comptage de coups gagnants avec les points quasi-aléa-

toires était 0,4141, ce qui donne une erreur de 1 pour cent.

Chacune de ces trois procédures donne des résultats très corrects. Cela signifie-t-il qu'elles sont également puissantes ? Je pense que non : cela signifie simplement que mesurer la superficie d'une feuille en deux dimensions est un problème facile.

La tâche devient beaucoup plus difficile en dimensions supérieures. Afin de comprendre pourquoi, un petit exercice de raisonnement multidimensionnel s'impose. Imaginez un « cube » à d dimensions, avec des côtés de longueur unité, et à l'intérieur un cube plus petit, dont les côtés ont pour longueur $1/2$. À une dimension, soit $d = 1$, un cube est juste un segment de droite, et le volume est équivalent à la longueur ; ainsi, le plus petit des deux cubes a la moitié du volume du plus gros. Pour $d = 2$, le cube est un carré, et le volume est l'aire ; le petit cube a un volume de $1/4$. Le cas $d = 3$ correspond au cube ordinaire, et le volume rempli par le petit cube vaut maintenant $1/8$.

La malédiction de la dimension

La progression continue. Quand nous atteignons $d = 20$, le petit cube (toujours avec un côté de longueur $1/2$ dans chaque dimension) n'occupe qu'un millionième du volume total. Le mathématicien américain Richard Bellman a qualifié ce phénomène de « malédiction de la dimension ». Si nous voulons mesurer le volume du petit cube en dimension $d = 20$ (ou même simplement détecter sa présence), nous avons besoin de suffisamment de points d'échantillonnage pour obtenir au moins un point