

en $1/N$, ce qui multiplie seulement par 10 l'effort pour chaque décimale de précision supplémentaire. Mais nous ne pouvons pas ignorer le terme $(\log N)^d$. Ce facteur croît exponentiellement avec la dimension d . L'effet est petit en dimension 1 ou 2, mais il finit par devenir énorme. En dimension 10, par exemple, $(\log N)^d/N$ reste supérieur à $1/\sqrt{N}$ tant que N est inférieur à 10^{43} .

C'est en raison de la lenteur connue de cette convergence en dimension élevée que S. Paskov et J. Traub ont créé la surprise avec le succès des calculs financiers pour $d = 360$. La seule explication plausible est que la « dimension effective » du problème serait en fait très inférieure à 360. En d'autres termes, le volume mesuré ne s'étendrait pas vraiment à toutes les dimensions de l'espace. De façon similaire, une feuille de papier occupe trois dimensions, mais on ne perd pas grand-chose à considérer qu'elle n'a pas d'épaisseur.

Cette explication pourrait sembler condescendante: le calcul a été un succès non pas parce que l'outil était plus puissant, mais parce que le problème était plus simple qu'il n'y paraissait. Mais il faut noter que cette réduction effective de la dimension fonctionne même quand nous

ignorons lesquelles des 360 dimensions peuvent être négligées sans risque. C'est presque magique.

Dans quelle mesure ce phénomène est-il fréquent? Est-ce juste un coup de chance, ou bien est-il confiné à une classe étroite de problèmes? La réponse n'est pas encore totalement claire, mais une notion portant le nom de « concentration de mesure » donne des raisons d'être optimistes. Elle suggère que les univers de grande dimensionnalité sont essentiellement des mondes assez plats et lisses, analogues à une planète où régnerait une forte gravité et où la formation de paysages escarpés et accidentés serait trop coûteuse en énergie.

Regain d'intérêt pour une idée née à Los Alamos

La méthode de Monte Carlo n'est pas une idée nouvelle, et la variante de quasi-Monte Carlo non plus. Des simulations fondées sur un échantillonnage aléatoire ont été tentées il y a plus d'un siècle par Francis Galton, lord Kelvin et d'autres. À l'époque, ces scientifiques travaillaient

L'AUTEUR



Brian HAYES tient depuis 1993 la chronique *Computing Science* dans la revue *American Scientist*.

Article publié avec l'aimable autorisation de *American Scientist*.

UNE RECETTE DE NOMBRES QUASI-ALÉATOIRES

Les nombres nécessaires pour former des motifs de discrédance faible ont été étudiés pour l'intérêt qu'ils présentaient en eux-mêmes longtemps avant l'invention de la méthode de quasi-Monte Carlo. Dans les années 1930, le mathématicien néerlandais Johannes van der Corput s'est demandé si des nombres distincts en séquence infinie pouvaient être placés un par un sur l'intervalle unité $[0, 1]$ de telle sorte que la discrédance mesurée à chaque étape ne dépasse jamais une borne finie donnée. La réponse, prou-

vée une décennie plus tard par Tatyana van Aardenne-Ehrenfest, une compatriote de van der Corput, est négative: la discrédance croît sans limite. Néanmoins, les travaux de van der Corput ont mis en lumière toute une famille d'ensembles et de suites quasi-aléatoires à discrédance faible.

La procédure pour construire une séquence de van der Corput est particulière en cela qu'elle mélange des nombres (des entités mathématiques) avec des numéraux (la représentation des nombres sous

forme de listes de chiffres). L'idée de base consiste à prendre un entier, d'inverser ses chiffres, de mettre une virgule devant, et enfin de traiter le résultat comme une fraction comprise entre 0 et 1. Les opérations peuvent être effectuées en n'importe quelle base. En base 2, par exemple, le nombre 100 (égal à 4 en base 10) devient 001 puis 0,001, qui est la représentation binaire de la fraction $1/8$.

Pour créer ainsi un motif quasi-aléatoire de N points en dimension 2, on part de la séquence de nombres entiers $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Puis, pour chaque point, on fixe la coordonnée x égale à i/N , tandis que la coordonnée y correspondante est donnée par le processus d'inversion des chiffres de van der Corput pour i . Le résultat pour $N = 8$ points est présenté ci-contre. Le motif quasi-aléatoire de la figure 2d a été créé de la même façon avec $N = 1\,024$. De nombreux autres algorithmes pour

suites à discrédance faible ont été développés, mais la plupart d'entre eux reposent aussi sur le mélange des chiffres d'un nombre. Certaines de ces suites se généralisent facilement à des dimensions arbitrairement grandes.

Les motifs créés par de tels mécanismes maintiennent un équilibre délicat entre ordre et désordre. L'espacement entre les points est raisonnablement uniforme, si bien que n'apparaissent pas de vides ou de regroupements, qui augmentent la discrédance des ensembles aléatoires. Mais la distribution uniforme doit être obtenue sans laisser les points former des rangées ou autres structures régulières qui augmenteraient elles aussi la discrédance. Trouver le juste équilibre entre ces objectifs un peu contradictoires n'est pas difficile en deux dimensions, mais les compromis sont inévitables en dimension supérieure.

