

en $1/N$, ce qui multiplie seulement par 10 l'effort pour chaque décimale de précision supplémentaire. Mais nous ne pouvons pas ignorer le terme $(\log N)^d$. Ce facteur croît exponentiellement avec la dimension d . L'effet est petit en dimension 1 ou 2, mais il finit par devenir énorme. En dimension 10, par exemple, $(\log N)^d/N$ reste supérieur à $1/\sqrt{N}$ tant que N est inférieur à 10^{43} .

C'est en raison de la lenteur connue de cette convergence en dimension élevée que S. Paskov et J. Traub ont créé la surprise avec le succès des calculs financiers pour $d = 360$. La seule explication plausible est que la « dimension effective » du problème serait en fait très inférieure à 360. En d'autres termes, le volume mesuré ne s'étendrait pas vraiment à toutes les dimensions de l'espace. De façon similaire, une feuille de papier occupe trois dimensions, mais on ne perd pas grand-chose à considérer qu'elle n'a pas d'épaisseur.

Cette explication pourrait sembler condescendante: le calcul a été un succès non pas parce que l'outil était plus puissant, mais parce que le problème était plus simple qu'il n'y paraissait. Mais il faut noter que cette réduction effective de la dimension fonctionne même quand nous

ignorons lesquelles des 360 dimensions peuvent être négligées sans risque. C'est presque magique.

Dans quelle mesure ce phénomène est-il fréquent? Est-ce juste un coup de chance, ou bien est-il confiné à une classe étroite de problèmes? La réponse n'est pas encore totalement claire, mais une notion portant le nom de « concentration de mesure » donne des raisons d'être optimistes. Elle suggère que les univers de grande dimensionnalité sont essentiellement des mondes assez plats et lisses, analogues à une planète où régnerait une forte gravité et où la formation de paysages escarpés et accidentés serait trop coûteuse en énergie.

Regain d'intérêt pour une idée née à Los Alamos

La méthode de Monte Carlo n'est pas une idée nouvelle, et la variante de quasi-Monte Carlo non plus. Des simulations fondées sur un échantillonnage aléatoire ont été tentées il y a plus d'un siècle par Francis Galton, lord Kelvin et d'autres. À l'époque, ces scientifiques travaillaient

L'AUTEUR



Brian HAYES tient depuis 1993 la chronique *Computing Science* dans la revue *American Scientist*.

Article publié avec l'aimable autorisation de *American Scientist*.

UNE RECETTE DE NOMBRES QUASI-ALÉATOIRES

Les nombres nécessaires pour former des motifs de discrédance faible ont été étudiés pour l'intérêt qu'ils présentaient en eux-mêmes longtemps avant l'invention de la méthode de quasi-Monte Carlo. Dans les années 1930, le mathématicien néerlandais Johannes van der Corput s'est demandé si des nombres distincts en séquence infinie pouvaient être placés un par un sur l'intervalle unité $[0, 1]$ de telle sorte que la discrédance mesurée à chaque étape ne dépasse jamais une borne finie donnée. La réponse, prou-

vée une décennie plus tard par Tatyana van Aardenne-Ehrenfest, une compatriote de van der Corput, est négative: la discrédance croît sans limite. Néanmoins, les travaux de van der Corput ont mis en lumière toute une famille d'ensembles et de suites quasi-aléatoires à discrédance faible.

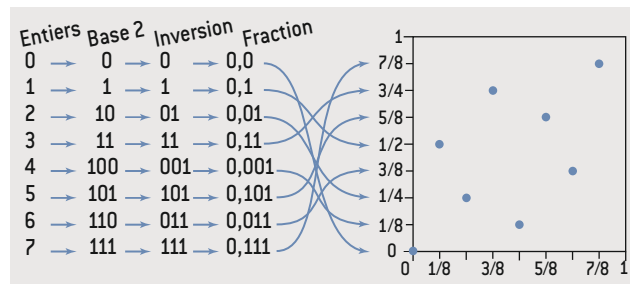
La procédure pour construire une séquence de van der Corput est particulière en cela qu'elle mélange des nombres (des entités mathématiques) avec des numéraux (la représentation des nombres sous

forme de listes de chiffres). L'idée de base consiste à prendre un entier, d'inverser ses chiffres, de mettre une virgule devant, et enfin de traiter le résultat comme une fraction comprise entre 0 et 1. Les opérations peuvent être effectuées en n'importe quelle base. En base 2, par exemple, le nombre 100 (égal à 4 en base 10) devient 001 puis 0,001, qui est la représentation binaire de la fraction $1/8$.

Pour créer ainsi un motif quasi-aléatoire de N points en dimension 2, on part de la séquence de nombres entiers $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Puis, pour chaque point, on fixe la coordonnée x égale à i/N , tandis que la coordonnée y correspondante est donnée par le processus d'inversion des chiffres de van der Corput pour i . Le résultat pour $N = 8$ points est présenté ci-contre. Le motif quasi-aléatoire de la figure 2d a été créé de la même façon avec $N = 1024$. De nombreux autres algorithmes pour

suites à discrédance faible ont été développés, mais la plupart d'entre eux reposent aussi sur le mélange des chiffres d'un nombre. Certaines de ces suites se généralisent facilement à des dimensions arbitrairement grandes.

Les motifs créés par de tels mécanismes maintiennent un équilibre délicat entre ordre et désordre. L'espacement entre les points est raisonnablement uniforme, si bien que n'apparaissent pas de vides ou de regroupements, qui augmentent la discrédance des ensembles aléatoires. Mais la distribution uniforme doit être obtenue sans laisser les points former des rangées ou autres structures régulières qui augmenteraient elles aussi la discrédance. Trouver le juste équilibre entre ces objectifs un peu contradictoires n'est pas difficile en deux dimensions, mais les compromis sont inévitables en dimension supérieure.



✓ BIBLIOGRAPHIE

H. Wozniakowski et L. Plaskota (éds.), *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2010*, Springer, à paraître.

B. Tuffin, *La simulation de Monte Carlo*, Hermès Sciences, 2010.

J. Dick et F. Pillichshammer, *Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration*, Cambridge University Press, 2010.

P. L'Ecuyer, *Quasi-Monte Carlo methods with applications in finance*, *Finance and Stochastics*, vol. 13(3), pp. 307-349, 2009 [www.springerlink.com/content/384785458w558462/fulltext.pdf].

F. Y. Kuo et I. H. Sloan, *Lifting the curse of dimensionality*, *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 52, pp. 1320-1328, 2005.

B. Chazelle, *The Discrepancy Method: Randomness and Complexity*, Cambridge University Press, 2000.

S. H. Paskov et J. E. Traub, *Faster valuation of financial derivatives*, *Journal of Portfolio Management*, vol. 22(1), pp. 113-121, 1995.

avec de véritables nombres aléatoires (et s'amusaient beaucoup à les engendrer!).

La méthode de Monte Carlo en elle-même a été inventée et a reçu son nom au Laboratoire de Los Alamos, dans les années qui ont suivi la Seconde Guerre mondiale. Il n'est pas étonnant que l'idée ait émergé en ce lieu : les chercheurs de ce laboratoire se confrontaient à des problèmes difficiles (encore plus effrayants que ceux des CMO); ils avaient accès aux premiers ordinateurs (ENIAC, MANIAC); et ils comptaient parmi eux des scientifiques très créatifs tels que Stanislaw Ulam, John von Neumann, Nicholas Metropolis et Marshall Rosenbluth.

Dès le départ, le groupe de Los Alamos a utilisé les nombres pseudo-aléatoires. Lors de la première conférence consacrée aux méthodes de Monte Carlo, en 1949, von Neumann a lancé sa célèbre boutade : « Qui-conque envisage les méthodes arithmétiques de production de nombres aléatoires est, évidemment, dans le péché. » Suite à quoi, il suivit la voie du péché.

Le quasi-Monte Carlo n'était pas loin derrière. La première publication sur le sujet, en 1951, était un rapport de Robert Richtmyer, alors directeur du Département théorique de Los Alamos. L'article est une entrée en matière impressionnante. Il expose les motivations de l'échantillonnage quasi-aléatoire, introduit une bonne partie de la terminologie et explique les mathématiques associées. Mais il était également présenté sous forme de compte-rendu d'une expérience ratée. Richtmyer avait voulu obtenir un temps de convergence amélioré pour les calculs de quasi-Monte Carlo, mais ses résultats étaient négatifs, ce qui a pu freiner les études ultérieures.

En 1968, Stanislaw Zaremba, à l'Université du Wisconsin à Madison, écrivit une vibrante apologie de l'échantillonnage quasi-aléatoire (doublée d'une diatribe contre les nombres pseudo-aléatoires). À ma connaissance, il ne fit pas beaucoup d'émules.

Les travaux sur les mathématiques des suites à discrétion faible se sont poursuivis au fil des décennies (en particulier grâce au Britannique Klaus Friedrich Roth, au Russe Ilya Sobol, à l'Autrichien Harald Niederreiter, à l'Australien Ian Sloan). On assiste actuellement à un regain d'intérêt pour les applications, et pas seulement parmi les analystes quantitatifs de Wall Street. La physique et d'autres sciences s'y mettent aussi. Le lancer de rayon, technique de calcul des éclairages en infographie, est un autre domaine prometteur.

Les fortunes changeantes des méthodes pseudo-aléatoires et quasi-aléatoires s'inscrivent dans le contexte de tendances plus larges. Au XIX^e siècle, le hasard de toute sorte était un intrus malvenu, toléré à contrecœur seulement quand cela était indispensable (en thermodynamique, dans la théorie de l'évolution darwinienne).

En revanche, le XX^e siècle s'est entiché de tout ce qui est aléatoire. Les méthodes de Monte Carlo faisaient partie de ce mouvement. La théorie quantique en était un morceau plus conséquent, qui a insisté sur les jeux de dés divins. Le mathématicien d'origine hongroise Paul Erdős a introduit le choix aléatoire dans la méthodologie des démonstrations mathématiques, ce qui est peut-être l'endroit où l'on s'attendrait le moins à ce qu'il joue un rôle. En calcul informatique, les algorithmes probabilistes sont devenus un sujet de recherche majeur. Le concept a filtré jusque dans les arts, avec la musique aléatoire et les tableaux d'éclaboussures du peintre américain Jackson Pollock. Puis il y eut la théorie du chaos. En 1967, un essai de l'informaticien américain Alfred Bork (1926-2007) qualifiait l'aléatoire de « caractéristique capitale de notre siècle ».

Du hasard à dose homéopathique

Aujourd'hui, toutefois, on est peut-être en train d'assister à un retour de balancier, surtout en informatique. Les algorithmes probabilistes conservent une grande importance en pratique, mais l'excitation intellectuelle est du côté de la « déprobabilisation », en montrant que la même tâche peut être effectuée par un programme déterministe. Une question ouverte est de savoir si tous les algorithmes peuvent être déprobabilisés. Certains spécialistes pensent que la réponse sera positive. S'ils ont raison, l'aléatoire ne confère pas d'avantage essentiel en calcul, bien qu'il puisse être bien commode.

Le quasi-aléatoire semble nous emmener dans la même direction, avec une préférence pour une administration du hasard à toutes petites doses. C'est peut-être une doctrine homéopathique qui nous attend, où plus la dilution de l'agent actif est grande, plus il est puissant. C'est absurde en médecine, mais qui sait si cela ne marche pas en mathématiques et en algorithmique ? ■

ACTUELLEMENT EN KIOSQUE



Dossier Pour la Science

Découvrir la chimie qui régule les écosystèmes ou la vie autour des sources hydrothermales des abysses ; exploiter de façon raisonnée la richesse des fonds marins (microalgues, ressources minérales, méthane...) ; découvrir des médicaments nouveaux ; protéger les mers contre les marées noires ou les déchets plastiques... Aujourd'hui, la chimie est au centre d'une alliance durable entre les hommes et les océans.

Numéro 73, octobre-décembre 2011 – Prix : 6,95 €

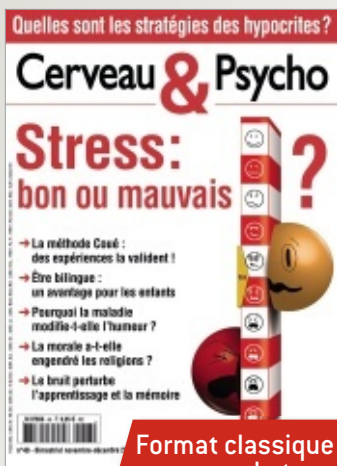
L'Essentiel Cerveau & Psycho

Aujourd'hui, d'innombrables résultats de recherche confirment que les enfants – mais aussi les adolescents et les adultes – soumis à la violence (images, jeux vidéo, etc.) sont eux-mêmes plus violents, moins sensibles aux violences faites à autrui. Sociologues, psychologues, psychiatres cherchent à identifier les causes de la violence pour mieux la combattre.

Numéro 8, novembre 2011-janvier 2012 – Prix : 6,95 €



Format classique
ou pocket



Format classique
ou pocket

Cerveau & Psycho

Nous nous sentons stressés par notre rythme de vie, notre travail, etc. Et si le stress n'était pas forcément mauvais ? Certains y trouvent un stimulant et, dans certaines conditions, il renforce la mémoire. Mais, comme en toute chose, il faut éviter l'excès ! À lire aussi : la méthode Coué validée par les psychologues, les enfants bilingues avantagés, les méfaits du bruit sur la concentration, etc.

Numéro 48, novembre-décembre 2011 – Prix : 6,95 €

POUR LA
SCIENCE