

2. L'omniscience peut être un handicap

L'omniscience n'est pas toujours un avantage. Le jeu du poulet (*chicken game*) est la situation où deux adversaires sont dans une compétition telle que si aucun ne cède, une catastrophe se produit, alors que si l'un cède, il perd mais évite la catastrophe.

L'exemple type d'une telle situation a été rendu populaire par le film de 1955 mis en scène par Nicolas Ray *La fureur de*

vivre, avec James Dean. Deux voitures foncent vers un précipice. Celui qui se jette hors de la voiture en premier est traité de lâche et a perdu, l'autre a le temps de sauter. Si aucun des deux ne cède, ils périssent tous les deux. Celui qui abandonne perd la partie, mais sauve sa vie... et celle de son adversaire.

Aux États-Unis, une telle situation s'est produite en juillet 2011 entre les démo-

crates et les républicains à propos de la question du relèvement du plafond de la dette américaine : si aucun des partis ne cédait, l'État américain était mis en faillite. Dans un tel jeu, celui qui ne peut ou ne veut pas comprendre la gravité de la situation se crée un avantage, car l'autre, se pensant seul informé du risque de catastrophe imminente, acceptera de perdre. Un être omniscient qui sait ce que vous allez faire est donc gravement handicapé dans une telle situation : face à lui, ne sautez pas de la voiture, car il sait que vous ne céderez pas et donc lui sautera.

La prise en considération d'hypothétiques êtres idéaux introduit toutes sortes de situations nouvelles en théorie des jeux. Elles ont été étudiées par Steven Brams dans son livre (voir la bibliographie).

JE SAVAIS QU'IL N'Y AURAIT JAMAIS DE
"LA FUREUR DE VIVRE 2" !...



Jean-Michel Thiriet

Cette solution n'est guère satisfaisante : pour être omnipotent, il suffit de ne rien vouloir ! Chacun peut devenir tout-puissant en limitant ses désirs à ce qu'il lui est facile d'obtenir. C'est certes très sage, mais ne fait pas des adeptes d'une telle philosophie des êtres omnipotents au sens habituel !

Notons que les théologiens sont confrontés à d'autres paradoxes de l'omnipotence. Il y a le paradoxe du libre arbitre :

(1) S'il existe des êtres disposant du libre arbitre, ils possèdent une certaine capacité d'action autonome ; (2) si un être possède une certaine capacité d'action autonome, il dispose alors du pouvoir de ne pas obéir à son créateur ; (3) si un être dispose du pouvoir de ne pas obéir à son créateur, alors celui-ci n'est pas tout-puissant. Conclusion : si nous disposons du libre arbitre, sans lequel le péché n'a pas de sens, le créateur de toute chose, s'il y en a un, n'est pas omnipotent.

Le paradoxe suivant est lui aussi sujet à débat : si le dieu des chrétiens est infiniment bon et omnipotent, pourquoi le mal existe-t-il ?

Mathématicien omnipotent ?

Oublions maintenant Descartes et admettons avec Aristote que certains absolus logiques comme le principe de non-contradiction ne peuvent jamais être négligés, et que donc même un être omnipotent, s'il en existe, y est soumis. Que penser alors du pouvoir d'un être omnipotent sur des problèmes de nature mathématique ? Voici quelques questions et tentatives de réponse sur ce thème.

Un être tout-puissant peut-il changer les décimales de π et faire que $\pi = 3,2$, comme une loi envisageait de l'imposer dans l'État de l'Indiana aux États-Unis en 1897 ?

Non, ce serait contraire au principe de non-contradiction, car si on suppose par exemple que $\pi = 3,2$, alors en quelques pas de déduction mathématique on tombe sur $0 = 1$, d'où l'on peut démontrer toute proposition et ainsi que sa négation : en logique, une seule contradiction a pour conséquence que tout est vrai et faux à la fois, ce qui

3. L'impossibilité de Newcomb

Un être omniscient capable de connaître le futur me propose le jeu suivant.

« Une boîte A contient 1 000 euros ou rien. La boîte B contient 1 euro. Tu vas ouvrir et prendre pour toi le contenu des deux boîtes A et B, ou seulement de la boîte A. Je remplis la boîte A selon deux règles. (1) Si je prédis que tu vas ouvrir les deux boîtes, je ne mets rien dans A. (2) Si je prédis

que tu vas ouvrir seulement la boîte A (et donc renoncer à l'euro qui est dans B), je mets 1 000 euros dans A. J'ai rempli les deux boîtes et je n'y touche plus. À toi de jouer. » Un raisonnement s'impose.

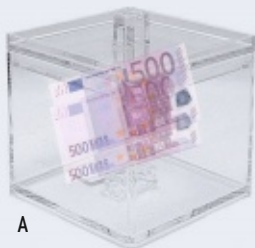
— Je ne vais ouvrir que la boîte A, car l'être omniscient qui remplit les boîtes sait ce que je vais faire, et donc si j'ouvre les deux boîtes, d'après la règle (1) je ne gagnerais

qu'un euro, alors que j'en aurai 1 000, d'après la règle (2), si j'ouvre seulement la boîte A.

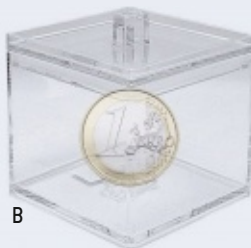
Pourtant un autre raisonnement parfaitement logique est aussi possible.

— Quoi que l'être omniscient ait fait au moment où je me trouve devant les boîtes remplies (à cet instant, leurs contenus ne peuvent plus changer), j'ai intérêt à ouvrir les deux plutôt qu'une, car il est toujours vrai que : (contenu de A) + (contenu de B) vaut un euro de plus que (contenu de A). Donc, je vais ouvrir les deux boîtes.

Cette contradiction montre qu'un être omniscient capable de prédire le futur de manière parfaite ne peut pas exister.



A



B

rend alors sans intérêt les mathématiques et même tout raisonnement. Vouloir ajouter $\pi = 3,2$ aux axiomes mathématiques, ou même changer la cent milliardième décimale de π (ce qui conduirait aussi à $0 = 1$), n'est pas envisageable. Tout être, aussi puissant soit-il, est donc contraint de mener un calcul pour connaître π , sans avoir la possibilité de décider quoi que ce soit le concernant. Et il en va ainsi de pratiquement tous les énoncés mathématiques.

L'Olympe n'a pas de roi

Une autre question se pose : un être tout-puissant peut-il résoudre un problème indécidable ?

Un problème indécidable est un problème qu'aucun algorithme ne peut résoudre. Aucun algorithme ne peut par exemple indiquer, pour toute équation de la forme $P=0$, où P est un polynôme à coefficients entiers, si oui ou non elle possède des solutions en nombres entiers ($x^2 - y^3 = 1$ en possède une, $x = 3, y = 2$; $x^2 + 3y^4 = 1$ n'en possède pas). L'indécidabilité de ces équations dites diophantiennes, thème du dixième problème de Hilbert, a été démontrée par Youri Matijasevich en 1970. Un autre résultat d'indécidabilité a été prouvé par Alan Turing dès 1936 : aucun algorithme ne peut déterminer quels sont les programmes qui s'arrêtent et ceux qui calculent indéfiniment.

Un être tout-puissant pourrait-il s'affranchir de cette indécidabilité et résoudre toute équation diophantienne qu'on lui soumettrait, ou identifier sans erreur les programmes qui ne s'arrêtent pas ? En stricte logique, rien ne s'oppose à une telle idée. On peut en effet imaginer un être supérieur qui sache résoudre le problème des équations diophantiennes, car rien ne l'oblige à résoudre le problème par une procédure mécanisable. Au contraire, l'idée qu'on a d'un être omnipotent implique assez naturellement qu'il ne soit pas limité à des algorithmes, comme l'est un ordinateur.

Les mathématiciens se sont amusés à imaginer ces êtres « surpuissants ». Dans la théorie de la calculabilité, Turing et Emil

4. L'ensemble des parties et l'omniscience

Patrick Grim a inventé un argument indirect montrant que l'omniscience n'existe pas. Cet argument est qualifié de cantorien, car il utilise le résultat de Georg Cantor que l'ensemble des parties d'un ensemble (même infini) est strictement plus grand que l'ensemble lui-même.

S'il y avait un ensemble V des vérités (mathématiques ou autres), alors pour chaque partie E de V (par exemple pour la partie {La tour Eiffel est à Paris, les hauteurs d'un triangle se croisent en un point, il y a une infinité de nombres premiers}) et pour chaque vérité v de V (par exemple : le *Titanic* a heurté un iceberg), on pourrait considérer la question : est-ce que v est dans E ?

Deux réponses sont possibles : v est dans E , v n'est pas dans E . L'une est une vérité. Il y a donc au moins autant de véri-

tés que de parties de V . D'après le théorème de Cantor, cela n'est pas possible.

À cet argument qu'il n'existe pas d'ensembles de toutes les vérités, et qu'en conséquence l'omniscience (la connaissance de l'ensemble de toutes les vérités) est inconcevable, les philosophes ont proposé diverses réponses... La situation est assez confuse à propos de cet argument cantorien. Elle l'est sans doute plus encore dans le cadre des théo-

ries alternatives des ensembles où le théorème de Cantor n'est plus vrai. En effet, dans de telles théories, il ne serait plus absurde d'envisager un ensemble de toutes les vérités.

Reste que l'argument de P. Grim est particulièrement simple et qu'il se fonde sur la version de la théorie des ensembles aujourd'hui universellement pratiquée : l'omniscience, qui consiste à connaître tous les éléments de l'ensemble de toutes les vérités, est donc difficile à concevoir.



L'ensemble V des vérités



L'ensemble des parties de l'ensemble V des vérités

Post ont introduit la notion de « machine avec oracle » : c'est, par définition, un mécanisme de calcul, qui a accès à une base de données infinie lui fournissant la réponse à une famille infinie de questions. Cet accès rend l'oracle plus puissant que tout autre machine et lui permet alors de résoudre des problèmes indécidables.

Une machine disposant d'un oracle lui indiquant les programmes qui s'arrêtent et ceux qui bouclent est ainsi en position de résoudre toute équation diophantienne. Pour chaque équation E qu'on lui soumet, la machine à oracle, construit le programme PrE qui énumère toutes les solutions envisageables (éventuellement en nombre infini) de l'équation étudiée et s'arrête dès qu'une solution est trouvée. Plutôt que de faire fonctionner ce programme PrE, la machine à oracle interroge sa base de données infinie au sujet de PrE qu'elle vient de construire. Si elle obtient la réponse « oui, le programme PrE s'arrête », alors elle lance le calcul et

fini par trouver au moins une solution. Sinon, elle répond : équation sans solution. Ainsi disposer de l'oracle qui indique l'arrêt permet de résoudre le problème indécidable des équations diophantiennes. On montre que l'inverse est vrai : un oracle qui indique les équations diophantiennes ayant des solutions serait en mesure de résoudre le problème de l'arrêt.

Chacune des machines à oracle dispose d'une puissance qui lui est propre, et on compare les puissances des diverses machines à oracle. Si la machine à oracle A sait résoudre tous les problèmes que la machine à oracle B résout, mais que A en résout que B ne résout pas, la machine A est plus puissante que la machine B. Toutes les machines à oracle ont-elles la même puissance (comme c'est le cas pour celle des équations diophantiennes et celle de l'arrêt) ? Existe-t-il une machine omnipotente dans le sens « au moins aussi puissante que toutes les autres machines à oracle » ?