

rend alors sans intérêt les mathématiques et même tout raisonnement. Vouloir ajouter $\pi = 3,2$ aux axiomes mathématiques, ou même changer la cent milliardième décimale de π (ce qui conduirait aussi à $0 = 1$), n'est pas envisageable. Tout être, aussi puissant soit-il, est donc contraint de mener un calcul pour connaître π , sans avoir la possibilité de décider quoi que ce soit le concernant. Et il en va ainsi de pratiquement tous les énoncés mathématiques.

L'Olympe n'a pas de roi

Une autre question se pose : un être tout-puissant peut-il résoudre un problème indécidable ?

Un problème indécidable est un problème qu'aucun algorithme ne peut résoudre. Aucun algorithme ne peut par exemple indiquer, pour toute équation de la forme $P=0$, où P est un polynôme à coefficients entiers, si oui ou non elle possède des solutions en nombres entiers ($x^2 - y^3 = 1$ en possède une, $x = 3, y = 2$; $x^2 + 3y^4 = 1$ n'en possède pas). L'indécidabilité de ces équations dites diophantiennes, thème du dixième problème de Hilbert, a été démontrée par Youri Matijasevich en 1970. Un autre résultat d'indécidabilité a été prouvé par Alan Turing dès 1936 : aucun algorithme ne peut déterminer quels sont les programmes qui s'arrêtent et ceux qui calculent indéfiniment.

Un être tout-puissant pourrait-il s'affranchir de cette indécidabilité et résoudre toute équation diophantienne qu'on lui soumettrait, ou identifier sans erreur les programmes qui ne s'arrêtent pas ? En stricte logique, rien ne s'oppose à une telle idée. On peut en effet imaginer un être supérieur qui sache résoudre le problème des équations diophantiennes, car rien ne l'oblige à résoudre le problème par une procédure mécanisable. Au contraire, l'idée qu'on a d'un être omnipotent implique assez naturellement qu'il ne soit pas limité à des algorithmes, comme l'est un ordinateur.

Les mathématiciens se sont amusés à imaginer ces êtres « surpuissants ». Dans la théorie de la calculabilité, Turing et Emil

4. L'ensemble des parties et l'omniscience

Patrick Grim a inventé un argument indirect montrant que l'omniscience n'existe pas. Cet argument est qualifié de cantorien, car il utilise le résultat de Georg Cantor que l'ensemble des parties d'un ensemble (même infini) est strictement plus grand que l'ensemble lui-même.

S'il y avait un ensemble V des vérités (mathématiques ou autres), alors pour chaque partie E de V (par exemple pour la partie {La tour Eiffel est à Paris, les hauteurs d'un triangle se croisent en un point, il y a une infinité de nombres premiers}) et pour chaque vérité v de V (par exemple : le *Titanic* a heurté un iceberg), on pourrait considérer la question : est-ce que v est dans E ?

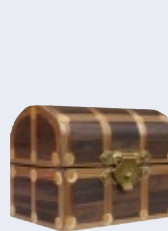
Deux réponses sont possibles : v est dans E , v n'est pas dans E . L'une est une vérité. Il y a donc au moins autant de véri-

tés que de parties de V . D'après le théorème de Cantor, cela n'est pas possible.

À cet argument qu'il n'existe pas d'ensembles de toutes les vérités, et qu'en conséquence l'omniscience (la connaissance de l'ensemble de toutes les vérités) est inconcevable, les philosophes ont proposé diverses réponses... La situation est assez confuse à propos de cet argument cantorien. Elle l'est sans doute plus encore dans le cadre des théo-

ries alternatives des ensembles où le théorème de Cantor n'est plus vrai. En effet, dans de telles théories, il ne serait plus absurde d'envisager un ensemble de toutes les vérités.

Reste que l'argument de P. Grim est particulièrement simple et qu'il se fonde sur la version de la théorie des ensembles aujourd'hui universellement pratiquée : l'omniscience, qui consiste à connaître tous les éléments de l'ensemble de toutes les vérités, est donc difficile à concevoir.



L'ensemble V des vérités



L'ensemble des parties de l'ensemble V des vérités

Post ont introduit la notion de « machine avec oracle » : c'est, par définition, un mécanisme de calcul, qui a accès à une base de données infinie lui fournissant la réponse à une famille infinie de questions. Cet accès rend l'oracle plus puissant que tout autre machine et lui permet alors de résoudre des problèmes indécidables.

Une machine disposant d'un oracle lui indiquant les programmes qui s'arrêtent et ceux qui bouclent est ainsi en position de résoudre toute équation diophantienne. Pour chaque équation E qu'on lui soumet, la machine à oracle, construit le programme PrE qui énumère toutes les solutions envisageables (éventuellement en nombre infini) de l'équation étudiée et s'arrête dès qu'une solution est trouvée. Plutôt que de faire fonctionner ce programme PrE, la machine à oracle interroge sa base de données infinie au sujet de PrE qu'elle vient de construire. Si elle obtient la réponse « oui, le programme PrE s'arrête », alors elle lance le calcul et

fini par trouver au moins une solution. Sinon, elle répond : équation sans solution. Ainsi disposer de l'oracle qui indique l'arrêt permet de résoudre le problème indécidable des équations diophantiennes. On montre que l'inverse est vrai : un oracle qui indique les équations diophantiennes ayant des solutions serait en mesure de résoudre le problème de l'arrêt.

Chacune des machines à oracle dispose d'une puissance qui lui est propre, et on compare les puissances des diverses machines à oracle. Si la machine à oracle A sait résoudre tous les problèmes que la machine à oracle B résout, mais que A en résout que B ne résout pas, la machine A est plus puissante que la machine B. Toutes les machines à oracle ont-elles la même puissance (comme c'est le cas pour celle des équations diophantiennes et celle de l'arrêt) ? Existe-t-il une machine omnipotente dans le sens « au moins aussi puissante que toutes les autres machines à oracle » ?