rend alors sans intérêt les mathématiques et même tout raisonnement. Vouloir ajouter $\pi = 3{,}2$ aux axiomes mathématiques, ou même changer la cent milliardième décimale de π (ce qui conduirait aussi à $0 = 1$), n'est pas envisageable. Tout être, aussi puissant soit-il, est donc contraint de mener un calcul pour connaître π, sans avoir la possibilité de décider quoi que ce soit le concernant. Et il en va ainsi de pratiquement tous les énoncés mathématiques.

L'Olympe n'a pas de roi

Une autre question se pose : un être tout-puissant peut-il résoudre un problème indécidable ?

Un problème indécidable est un problème qu'aucun algorithme ne peut résoudre. Aucun algorithme ne peut par exemple indiquer, pour toute équation de la forme $P = 0$, où P est un polynôme à coefficients entiers, si oui ou non elle possède des solutions en nombres entiers ($x^2 - y^3 = 1$ en possède une, $x = 3, y = 2$; $x^2 + 3y^4 = 1$ n'en possède pas). L'indécidabilité de ces équations dites diophantiennes, thème du dixième problème de Hilbert, a été démontrée par Youri Matiyasevich en 1970. Un autre résultat d'indécidabilité a été prouvé par Alan Turing dès 1936 : aucun algorithme ne peut déterminer quels sont les programmes qui s'arrêtent et ceux qui calculent indéfiniment.

Un être tout-puissant pourrait-il s'affranchir de cette indécidabilité et résoudre toute équation diophantienne qu'on lui soumettrait, ou identifier sans erreur les programmes qui ne s'arrêtent pas ? En stricte logique, rien ne s'oppose à une telle idée. On peut en effet imaginer un être supérieur qui sache résoudre le problème des équations diophantiennes, car rien ne l'oblige à résoudre le problème par une procédure mécanisable. Au contraire, l'idée qu'on a d'un être omnipotent implique assez naturellement qu'il ne soit pas limité à des algorithmes, comme l'est un ordinateur.

Les mathématiciens se sont amusés à imaginer ces êtres « surpuissants ». Dans la théorie de la calculabilité, Turing et Emil Post ont introduit la notion de « machine avec oracle » : c'est, par définition, un mécanisme de calcul, qui a accès à une base de données infinie lui fournissant la réponse à une famille infinie de questions. Cet accès rend l'oracle plus puissant que tout autre machine et lui permet alors de résoudre des problèmes indécidables.

Une machine disposant d'un oracle lui indiquant les programmes qui s'arrêtent et ceux qui bouclent est ainsi en position de résoudre toute équation diophantienne. Pour chaque équation E qu'on lui soumet, la machine à oracle, construit le programme PrE qui énumère toutes les solutions envisageables (éventuellement en nombre infini) de l'équation étudiée et s'arrête dès qu'une solution est trouvée. Plutôt que de faire fonctionner ce programme PrE, la machine à oracle interroge sa base de données infinie au sujet de PrE qu'elle vient de construire. Si elle obtient la réponse « oui, le programme PrE s'arrête », alors elle lance le calcul et finit par trouver au moins une solution. Sinon, elle répond : équation sans solution. Ainsi disposer de l'oracle qui indique l'arrêt permet de résoudre le problème indécidable des équations diophantiennes. On montre que l'inverse est vrai : un oracle qui indique les équations diophantiennes ayant des solutions serait en mesure de résoudre le problème de l'arrêt.

Chacune des machines à oracle dispose d'une puissance qui lui est propre, et on compare les puissances des diverses machines à oracle. Si la machine à oracle A sait résoudre tous les problèmes que la machine à oracle B résout, mais que A en résout que B ne résout pas, la machine A est plus puissante que la machine B. Toutes les machines à oracle ont-elles la même puissance (comme c'est le cas pour celle des équations diophantiennes et celle de l'arrêt) ? Existe-t-il une machine omnipotente dans le sens « au moins aussi puissante que toutes les autres machines à oracle » ?

4. L'ensemble des parties et l'omniscience

Patrick Grim a inventé un argument indirect montrant que l'omniscience n'existe pas. Cet argument est qualifié de cantorien, car il utilise le résultat de Georg Cantor que l'ensemble des parties d'un ensemble (même infini) est strictement plus grand que l'ensemble lui-même.

S'il y avait un ensemble V des vérités (mathématiques ou autres), alors pour chaque partie E de V (par exemple pour la partie {La tour Eiffel est à Paris, les hauteurs d'un triangle se croisent en un point, il y a une infinité de nombres premiers}) et pour chaque vérité *v* de V (par exemple : le *Titanic* a heurté un iceberg), on pourrait considérer la question : est-ce que *v* est dans E ?

Deux réponses sont possibles : *v* est dans E, *v* n'est pas dans E. L'une est une vérité. Il y a donc au moins autant de vérités que de parties de V. D'après le théorème de Cantor, cela n'est pas possible.

À cet argument qu'il n'existe pas d'ensembles de toutes les vérités, et qu'en conséquence l'omniscience (la connaissance de l'ensemble de toutes les vérités) est inconcevable, les philosophes ont proposé diverses réponses… auxquelles P. Grim a répondu. La situation est assez confuse à propos de cet argument cantorien. Elle l'est sans doute plus encore dans le cadre des théories alternatives des ensembles où le théorème de Cantor n'est plus vrai. En effet, dans de telles théories, il ne serait plus absurde d'envisager un ensemble de toutes les vérités.

Reste que l'argument de P. Grim est particulièrement simple et qu'il se fonde sur la version de la théorie des ensembles aujourd'hui universellement pratiquée : l'omniscience, qui consiste à connaître tous les éléments de l'ensemble de toutes les vérités, est donc difficile à concevoir.

L'ensemble V des vérités

L'ensemble des parties de l'ensemble V des vérités

La réponse à ces questions mathématiques est connue. Il y a plusieurs niveaux chez les oracles et il n'y a pas d'oracle omnipotent. En effet, les techniques permettant de traiter ce type de questions conduisent au résultat suivant : pour toute machine M à oracle, il existe une machine à oracle M' strictement plus puissante que M. (La démonstration utilise la même idée que celle permettant de démontrer qu'il existe des problèmes indécidables.)

Une multitude de questions ont été résolues concernant la structure de la relation d'ordre entre machines à oracle. Cette théorie mathématique étudie la hiérarchie entre les êtres « surpuissants » que sont les machines à oracle : c'est une étude sociologique de l'Olympe. Les divers niveaux dans cette hiérarchie se dénomment les degrés de Turing et ils constituent une échelle qui détermine la gravité de l'indécidabilité des problèmes indécidables.

En plus de savoir qu'il n'y en a pas de plus grand (pas d'être omnipotent dans cet Olympe mathématique), on sait par exemple qu'entre deux degrés différents, il y en a toujours une infinité de degrés intermédiaires. On sait aussi qu'entre deux degrés donnés différents M et M', avec $M < M'$, il en existe deux qui ne sont pas comparables, N et N' : N a une puissance intermédiaire à celle de M et de M', de même que N', mais N n'est pas supérieur à N', ni N' supérieur à N.

Parmi les questions qu'on peut se poser concernant l'omnipotence mathématique, celles concernant le continu des nombres réels viennent à l'esprit.

Par exemple, peut-on envisager l'existence d'un être tout-puissant qui manipule les nombres réels comme nous manipulons les entiers ?

Omnipotence et nombres réels

Là encore, rien ne semble s'y opposer et les mathématiciens ont étudié la théorie de ces êtres hypothétiques surpuissants qui calculent avec les nombres réels aux développements décimaux infinis comme s'il s'agissait de nombres entiers : ils peuvent multiplier sans erreur deux nombres réels ou les comparer, ce qu'un mathématicien humain ne peut pas faire en général.

Dernière question à propos de l'omnipotence mathématique : Est-il envisageable

5. Paradoxes de Moore et de Frederic Fitch

Les deux paradoxes que nous présentons ici ont donné lieu depuis dix ans à un nombre considérable de travaux dont deux livres et une thèse. Ils ne s'appuient ni sur des autoréférences (qu'on considère interdites) ni sur une capacité supposée à connaître le futur (que l'on considère impossible). On utilisera deux raccourcis d'écriture :

pos : il est possible que…

connu : il est connu que…

Pour *connu*, on ne précise pas qui connaît, mais cela pourrait être la CIA, vous, moi ou Dieu pour ceux qui sont croyants.

Paradoxe de Moore

On suppose qu'il est connu qu'une certaine affirmation p est vraie, mais qu'elle n'est pas *connue*. On va démontrer que cela conduit à une contradiction.

(1) *connu* (p et *non connu* p).

On a d'après la règle évidente *connu* (A et B) => (*connu* A et *connu* B):

(2) *connu* p et *connu* (*non connu* p).

Maintenant, on s'appuie sur la règle que ce qui est connu est vrai : (*connu* p => p). Là encore, c'est un axiome raisonnable pour manipuler le symbole *connu*. La formule (2) donne alors :

(3) *connu* p et *non connu* p.

La formule (3) est une contradiction. L'avoir obtenue signifie qu'il n'est pas possible de connaître une affirmation p en même temps qu'on sait qu'on ne la connaît pas. C'est ce qu'on dénomme le paradoxe de Moore. Peut-être n'est-ce pas vraiment paradoxal : après tout, personne de sensé ne dira : « Il pleut, mais je ne sais pas qu'il pleut. »

Paradoxe de Fitch

Le paradoxe de Fitch (qui utilise la conclusion de Moore) est plus ennuyeux. Il va montrer que, si l'on accepte l'idée que « Tout ce qui est vrai est connaissable », alors « Tout ce qui est vrai est connu ».

On part de l'hypothèse suivante (parfois dénommée axiome de la connaissabilité) :

p => *pos* (*connu* p), soit tout ce qui est vrai est connaissable.

On va maintenant établir qu'il ne peut pas exister de proposition p qui soit vraie en même temps que non connue (ce qui signifie que la CIA, vous, moi et Dieu nous sommes omniscients).

D'après l'axiome de la connaissabilité qu'on applique en remplaçant p par (p et *non connu* p) :

(4) (p et *non connu* p) => *pos* (*connu* (p et *non connu* p)).

D'après le raisonnement de Moore, *connu* (p et *non connu* p) entraîne une contradiction. Il n'est donc pas possible que

connu (p et *non connu* p).

Dit autrement, il est faux que *pos* (*connu* (p et *non connu* p)), c'est-à-dire :

(5) *non pos* (*connu* (p et *non connu* p)).

La règle logique de contraposition indique :

(A => B) <=> (*non* B => *non* A).

En l'utilisant à partir de (4) et (5), on en tire :

(6) *non* (p et *non connu* p), ce qui est logiquement équivalent à :

(7) p => *connu* p.

Le passage de (6) à (7) se justifie par la suite d'équivalences :

non (A et *non* B) <=>

(*non* A ou *non non* B) <=>

(*non* A ou B) <=> (A => B).

En conclusion, l'utilisation de principes logiques, tous d'une parfaite évidence, et d'un raisonnement en sept étapes conduit à l'affirmation que si « tout ce qui est vrai est connaissable », alors « tout ce qui est vrai est connu ». C'est inattendu (d'où les nombreux travaux récents sur ce raisonnement). Cela a en particulier une grave conséquence pour l'idée d'être omniscient. En effet :

A. Soit il existe des vérités non connaissables, et il n'y a alors pas d'être omniscient.

B. Soit toute chose vraie est connue, et alors non seulement Dieu est omniscient, mais la CIA, vous et moi nous le sommes aussi.

Il est clair que ni la CIA, ni vous, ni moi nous ne sommes omniscients, donc B est faux et il existe par conséquent des vérités inconnaissables : il n'existe pas d'être omniscient. Notons bien que, cette fois, l'impossibilité de l'omniscience ne provient pas de la capacité supposée d'un être omniscient à voir le futur, comme c'est le cas avec le paradoxe de Newcomb.