

La géométrie

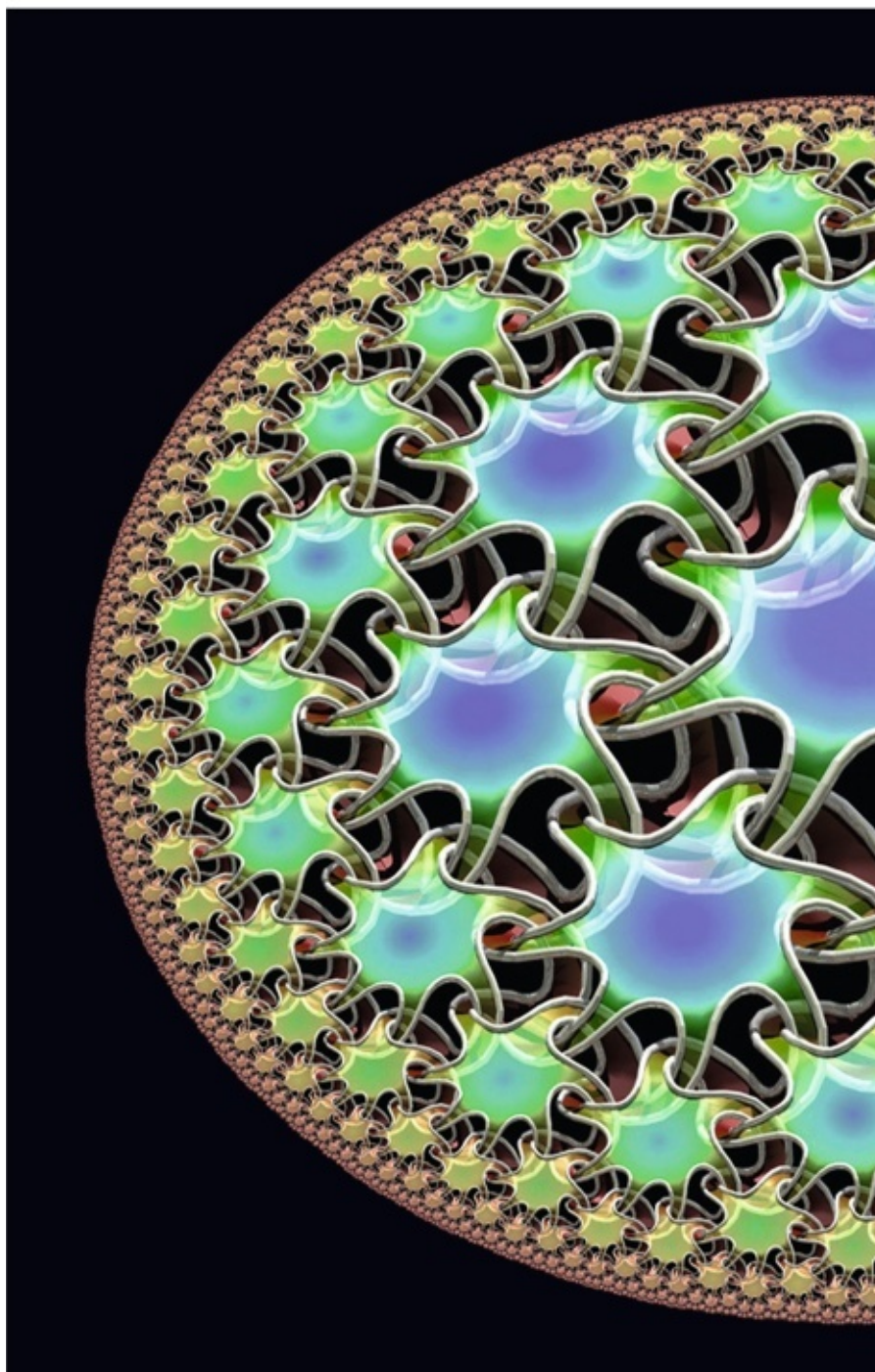
Bien après l'invention de la perspective en peinture, les mathématiciens ont conçu des méthodes pour conférer un bord à un espace géométrique infini. Cette construction d'un horizon représente un outil mathématique puissant.

Françoise Dal'Bo-Milonet

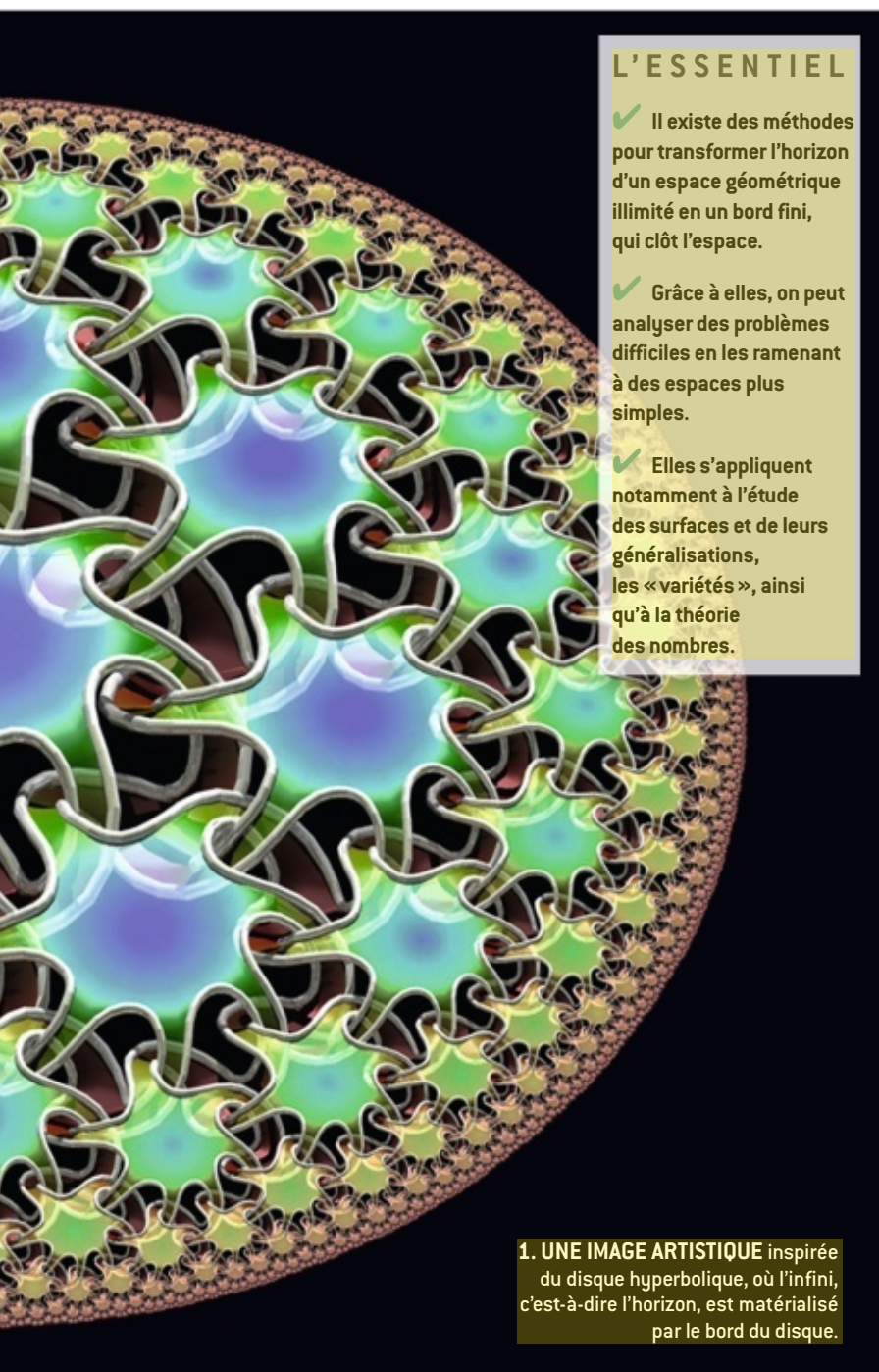
Observons deux droites parallèles : notre œil les voit converger en un point du champ visuel. Cette perception, que le dessin en perspective reproduit sur un plan, nous paraît aujourd'hui évidente. Il a pourtant fallu beaucoup d'audace aux peintres du XV^e siècle pour représenter un point de convergence à l'infini par un point ordinaire sur le tableau. Ce geste libérateur a donné lieu à divers procédés graphiques de représentation en perspective.

Deux siècles plus tard, en cherchant à les unifier, Girard Desargues, un architecte et géomètre lyonnais mort il y a tout juste 350 ans (en 1661), pose les bases d'une géométrie qui neutralise la différence entre le fini et l'infini. Desargues introduit un espace clos, qui contient le plan ordinaire mais où toutes les droites sont sécantes, y compris les droites parallèles.

Le savant lyonnais, maître de Blaise Pascal, détrône ainsi le plan usuel, support universel des figures de la géométrie d'Euclide. Trop révolutionnaires pour



des horizons



L'ESSENTIEL

✓ Il existe des méthodes pour transformer l'horizon d'un espace géométrique illimité en un bord fini, qui clôt l'espace.

✓ Grâce à elles, on peut analyser des problèmes difficiles en les ramenant à des espaces plus simples.

✓ Elles s'appliquent notamment à l'étude des surfaces et de leurs généralisations, les « variétés », ainsi qu'à la théorie des nombres.

1. UNE IMAGE ARTISTIQUE inspirée du disque hyperbolique, où l'infini, c'est-à-dire l'horizon, est matérialisé par le bord du disque.

Paul Nèkander, <http://hugomani23.com/>

L'époque et écrits dans un style peu académique, les travaux de Desargues passent inaperçus face à ceux de son contemporain René Descartes, qui défendent la toute-puissance de l'algèbre. Ils ne sont sortis de l'oubli qu'au XIX^e siècle. Les idées de Desargues ont alors ouvert la voie à une nouvelle géométrie dite projective, qui prend en compte simultanément un espace et son « horizon ».

Les études géométriques, autrefois centrées sur les figures, se sont désormais tournées vers l'espace qui les contient. Elles ont conduit à la découverte, dans les années 1850, du premier exemple de géométrie non euclidienne. Un peu plus tard, trois siècles après Desargues, la notion de « bord visuel », qui formalise les points de fuite et permet ainsi de clore les espaces géométriques, entrait de plein droit dans les mathématiques.

De l'infini géométrique au fini

Dès lors, les mathématiciens ont tissé des liens profonds entre espaces clos et espaces illimités. Et il y a une quarantaine d'années, sous l'impulsion de l'Américain George Mostow, ces bords se sont introduits dans les raisonnements : aujourd'hui, le géomètre les utilise comme de précieuses passerelles qui lui permettent de traduire des problèmes posés sur un espace illimité en termes de géométrie bornée en petite dimension. J'illustrerai ici la force de cette approche sur deux axes de la recherche actuelle en mathématiques : les « variétés hyperboliques », objets géométriques convoités par les topologues et les cosmologistes, et les pavages réguliers non euclidiens.

Avant d'introduire la notion de variété hyperbolique, considérons d'abord un exemple plus simple d'espace géométrique non euclidien : la sphère. Cette figure