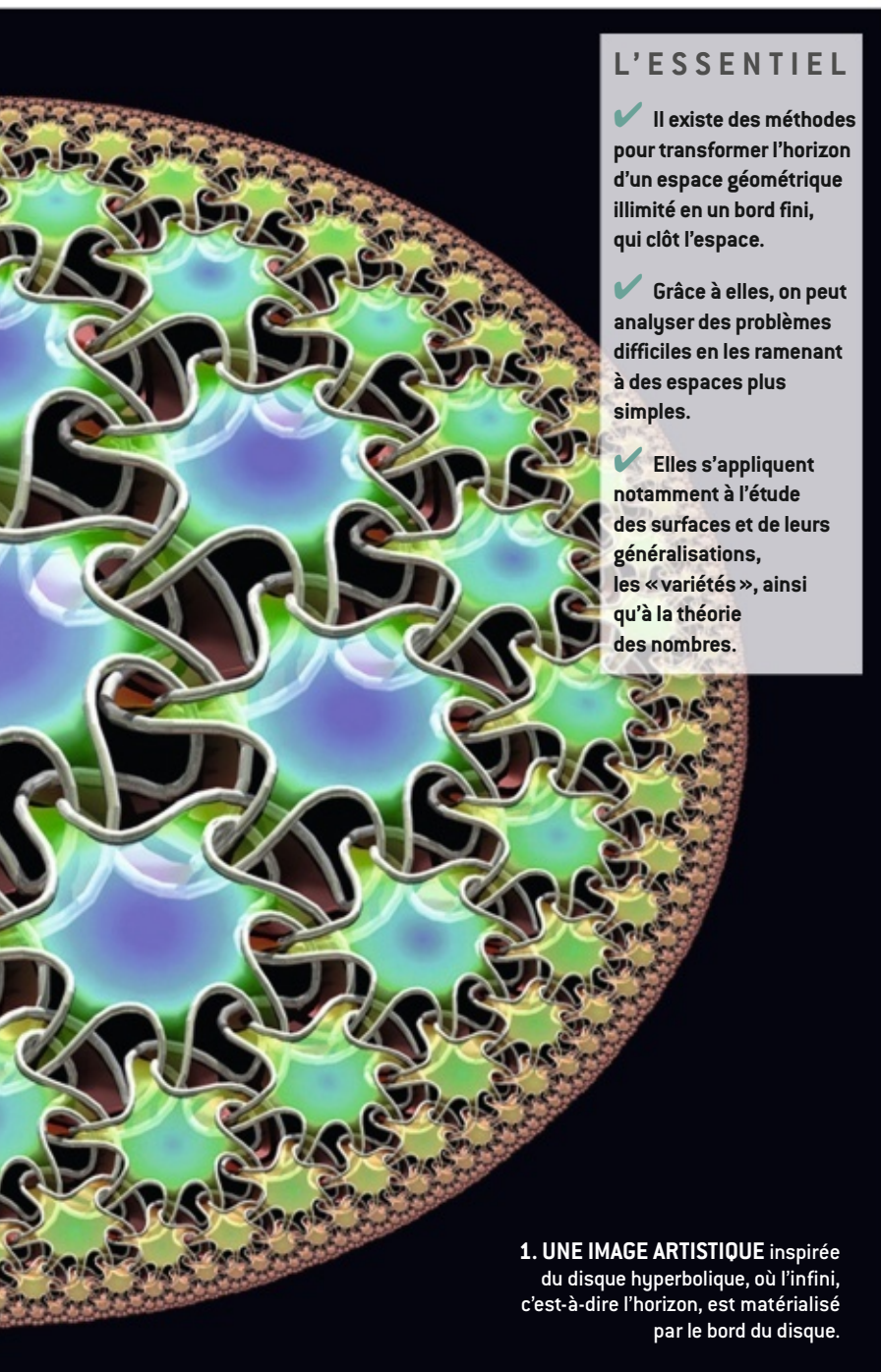


des horizons



L'ESSENTIEL

- ✓ Il existe des méthodes pour transformer l'horizon d'un espace géométrique illimité en un bord fini, qui clôt l'espace.
- ✓ Grâce à elles, on peut analyser des problèmes difficiles en les ramenant à des espaces plus simples.
- ✓ Elles s'appliquent notamment à l'étude des surfaces et de leurs généralisations, les «variétés», ainsi qu'à la théorie des nombres.

1. UNE IMAGE ARTISTIQUE inspirée du disque hyperbolique, où l'infini, c'est-à-dire l'horizon, est matérialisé par le bord du disque.

Paul Nylander, <http://hugmann123.com/>

l'époque et écrits dans un style peu académique, les travaux de Desargues passent inaperçus face à ceux de son contemporain René Descartes, qui défendent la toute-puissance de l'algèbre. Ils ne sont sortis de l'oubli qu'au XIX^e siècle. Les idées de Desargues ont alors ouvert la voie à une nouvelle géométrie dite projective, qui prend en compte simultanément un espace et son «horizon».

Les études géométriques, autrefois centrées sur les figures, se sont désormais tournées vers l'espace qui les contient. Elles ont conduit à la découverte, dans les années 1850, du premier exemple de géométrie non euclidienne. Un peu plus tard, trois siècles après Desargues, la notion de «bord visuel», qui formalise les points de fuite et permet ainsi de clore les espaces géométriques, entrait de plein droit dans les mathématiques.

De l'infini géométrique au fini

Dès lors, les mathématiciens ont tissé des liens profonds entre espaces clos et espaces illimités. Et il y a une quarantaine d'années, sous l'impulsion de l'Américain George Mostow, ces bords se sont introduits dans les raisonnements : aujourd'hui, le géomètre les utilise comme de précieuses passerelles qui lui permettent de traduire des problèmes posés sur un espace illimité en termes de géométrie bornée en petite dimension. J'illustrerai ici la force de cette approche sur deux axes de la recherche actuelle en mathématiques : les «variétés hyperboliques», objets géométriques convoités par les topologues et les cosmologistes, et les pavages réguliers non euclidiens.

Avant d'introduire la notion de variété hyperbolique, considérons d'abord un exemple plus simple d'espace géométrique non euclidien : la sphère. Cette figure

bien connue peut sembler simple. Pourtant, la géométrie qui la caractérise est longtemps restée ignorée. Certes, en cosmologie, l'hypothèse d'un monde sphérique, clos, s'est longtemps imposée face à celle d'un Univers sans fin et sans limites. Mais en géométrie, le monde de départ est l'espace euclidien, un réceptacle neutre, illimité, où les droites se prolongent à l'infini. C'est peut-être ce parti pris qui explique que la sphère, pourtant si familière, ait mis du temps à s'imposer comme espace géométrique à part entière.

Les siècles de discussions qui ont porté sur le cinquième postulat de la géométrie d'Euclide (325-265 avant notre ère) illustrent bien cette résistance à prendre en compte la sphère. La version la plus connue de ce postulat affirme que par un point du plan situé à l'extérieur d'une droite D , passe une seule droite ne rencontrant pas D (voir la figure 2a). Le statut de cet énoncé a

espace illimité, conforme au plan euclidien sur bien des points, mais qui s'en départit sur un : le chemin le plus court, ou « géodésique », entre deux points, n'est pas un segment de droite. Comme nous le verrons, dans ce nouvel espace dit hyperbolique, les analogues des droites du plan, les géodésiques, ne vérifient pas le cinquième postulat d'Euclide, formulé en remplaçant le terme de droite par celui de géodésique.

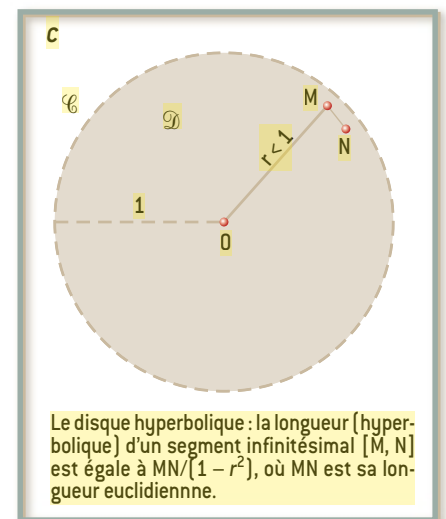
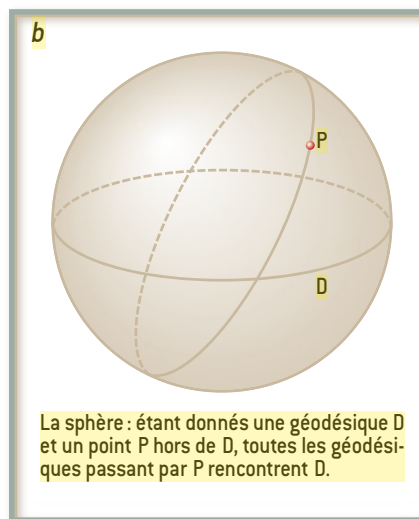
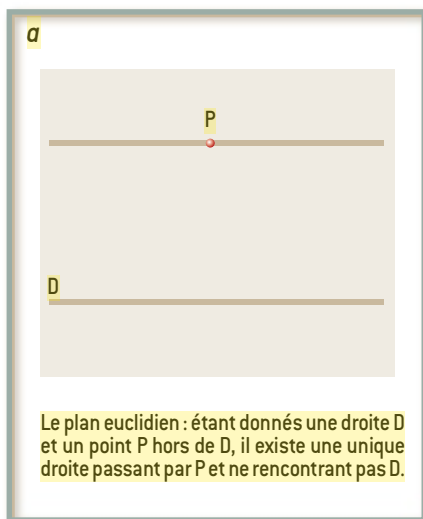
La sphère, espace illégitime ?

Pour des raisons différentes, le cinquième postulat d'Euclide est aussi incompatible avec la géométrie de la sphère. Pour nous en convaincre, mettons-nous à la place d'un marin au long cours. Pour lui, le chemin géodésique (le chemin le plus court) entre deux points à la surface de la Terre est porté

le concept de variété : il s'agit d'un espace qui, localement, c'est-à-dire au voisinage de chacun de ses points, peut être décrit par un espace euclidien de dimension fixe n . Ses travaux unificateurs permettront enfin à la sphère, cas particulier de variété de dimension 2, d'acquiescer un statut d'espace géométrique, aux côtés de celui d'Euclide et de l'espace de Bolyai-Lobatchevski.

Depuis, les mathématiciens n'ont eu de cesse d'intégrer pleinement à leur domaine ces trois géométries : euclidienne, hyperbolique, sphérique. À commencer par le Français Henri Poincaré (1854-1912), qui a fourni une construction concrète de l'exemple abstrait conçu par Bolyai et Lobatchevski.

En quoi consiste l'espace de Bolyai-Lobatchevski ? Il en existe de nombreux modèles, dont celui dit du disque hyperbolique. Pour construire ce modèle, on part d'un disque $\mathcal{D}$ du plan euclidien, centré



suscité bien des interrogations : existe-t-il une géométrie cohérente, non euclidienne, dans laquelle il est mis en défaut ?

Pendant plus de deux millénaires, des mathématiciens ont tenté de démontrer que le cinquième postulat découle des quatre autres, donc qu'il n'existe pas de géométrie où cet axiome n'est pas vérifié. Il a fallu attendre les années 1850 pour que l'on comprenne que ces tentatives sont vouées à l'échec et qu'apparaisse le premier exemple de géométrie non euclidienne. Deviné par l'Allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), on l'attribue au Hongrois Janos Bolyai (1802-1860) et au Russe Nicolai Lobatchevski (1792-1856). Ces mathématiciens ont conçu un

par un cercle dont le centre est celui de la sphère (voir la figure 2b). Deux tels grands cercles, autrement dit deux géodésiques de la sphère, se rencontrent toujours.

Pourquoi les mathématiciens sont-ils passés à côté de cette géométrie sphérique, non euclidienne, que les marins connaissaient bien avant le XIX^e siècle ? Pour reprendre l'argumentation de l'historien François Russo, l'hypothèse d'une géométrie où deux géodésiques ont toujours au moins un point d'intersection a longtemps été considérée comme inacceptable, notamment par Lobatchevski et Bolyai, car elle contraignait l'espace à être clos.

L'Allemand Bernhard Riemann (1827-1866) la rendra légitime en introduisant

en un point O , de rayon 1 et privé du cercle $\mathcal{C}$ qui le délimite. Sur ce disque « ouvert », on change les règles métriques en imposant une nouvelle façon de calculer les longueurs des chemins. Dans le plan euclidien, on calcule la longueur d'une portion de courbe en l'approchant par celle d'une ligne polygonale composée de segments de droite de plus en plus nombreux et courts, c'est-à-dire tels que la ligne brisée épouse de plus en plus finement la courbe. Il en est de même pour la longueur d'un chemin dans le disque hyperbolique. Pour définir d'une nouvelle façon les longueurs sur le disque hyperbolique $\mathcal{D}$, il suffit donc de spécifier la longueur d'un segment infinitésimal