

bien connue peut sembler simple. Pourtant, la géométrie qui la caractérise est longtemps restée ignorée. Certes, en cosmologie, l'hypothèse d'un monde sphérique, clos, s'est longtemps imposée face à celle d'un Univers sans fin et sans limites. Mais en géométrie, le monde de départ est l'espace euclidien, un réceptacle neutre, illimité, où les droites se prolongent à l'infini. C'est peut-être ce parti pris qui explique que la sphère, pourtant si familière, ait mis du temps à s'imposer comme espace géométrique à part entière.

Les siècles de discussions qui ont porté sur le cinquième postulat de la géométrie d'Euclide (325-265 avant notre ère) illustrent bien cette résistance à prendre en compte la sphère. La version la plus connue de ce postulat affirme que par un point du plan situé à l'extérieur d'une droite D , passe une seule droite ne rencontrant pas D (voir la figure 2a). Le statut de cet énoncé a

espace illimité, conforme au plan euclidien sur bien des points, mais qui s'en départit sur un : le chemin le plus court, ou « géodésique », entre deux points, n'est pas un segment de droite. Comme nous le verrons, dans ce nouvel espace dit hyperbolique, les analogues des droites du plan, les géodésiques, ne vérifient pas le cinquième postulat d'Euclide, formulé en remplaçant le terme de droite par celui de géodésique.

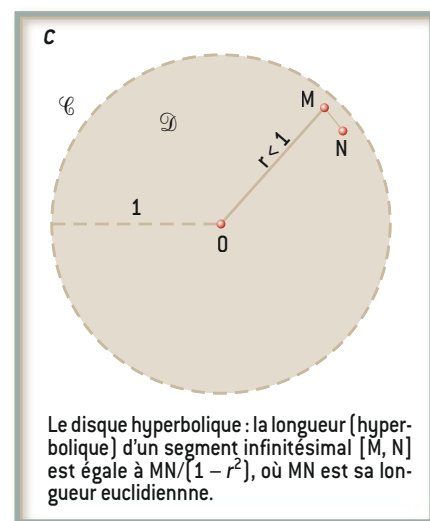
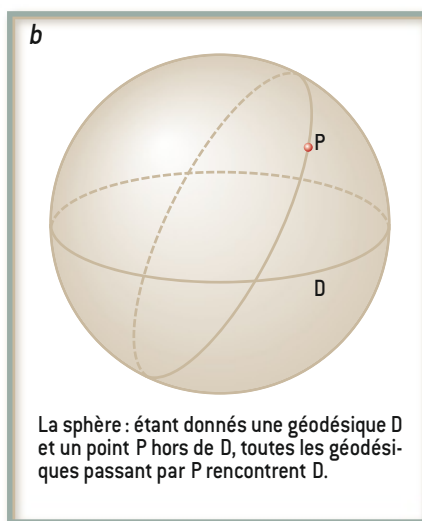
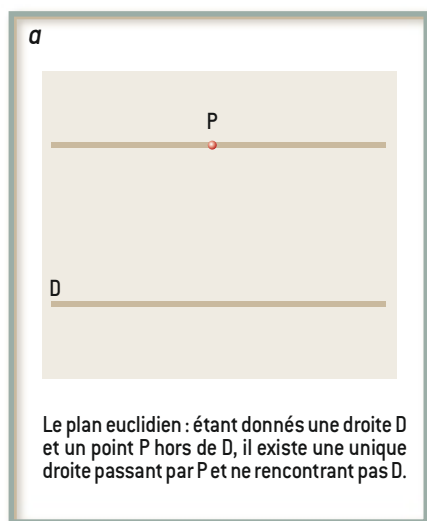
La sphère, espace illégitime ?

Pour des raisons différentes, le cinquième postulat d'Euclide est aussi incompatible avec la géométrie de la sphère. Pour nous en convaincre, mettons-nous à la place d'un marin au long cours. Pour lui, le chemin géodésique (le chemin le plus court) entre deux points à la surface de la Terre est porté

le concept de variété : il s'agit d'un espace qui, localement, c'est-à-dire au voisinage de chacun de ses points, peut être décrit par un espace euclidien de dimension fixe n . Ses travaux unificateurs permettront enfin à la sphère, cas particulier de variété de dimension 2, d'acquiescer un statut d'espace géométrique, aux côtés de celui d'Euclide et de l'espace de Bolyai-Lobatchevski.

Depuis, les mathématiciens n'ont eu de cesse d'intégrer pleinement à leur domaine ces trois géométries : euclidienne, hyperbolique, sphérique. À commencer par le Français Henri Poincaré (1854-1912), qui a fourni une construction concrète de l'exemple abstrait conçu par Bolyai et Lobatchevski.

En quoi consiste l'espace de Bolyai-Lobatchevski ? Il en existe de nombreux modèles, dont celui dit du disque hyperbolique. Pour construire ce modèle, on part d'un disque $\mathcal{D}$ du plan euclidien, centré



suscité bien des interrogations : existe-t-il une géométrie cohérente, non euclidienne, dans laquelle il est mis en défaut ?

Pendant plus de deux millénaires, des mathématiciens ont tenté de démontrer que le cinquième postulat découle des quatre autres, donc qu'il n'existe pas de géométrie où cet axiome n'est pas vérifié. Il a fallu attendre les années 1850 pour que l'on comprenne que ces tentatives sont vouées à l'échec et qu'apparaisse le premier exemple de géométrie non euclidienne. Deviné par l'Allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), on l'attribue au Hongrois Janos Bolyai (1802-1860) et au Russe Nicolai Lobatchevski (1792-1856). Ces mathématiciens ont conçu un

par un cercle dont le centre est celui de la sphère (voir la figure 2b). Deux tels grands cercles, autrement dit deux géodésiques de la sphère, se rencontrent toujours.

Pourquoi les mathématiciens sont-ils passés à côté de cette géométrie sphérique, non euclidienne, que les marins connaissaient bien avant le XIX^e siècle ? Pour reprendre l'argumentation de l'historien François Russo, l'hypothèse d'une géométrie où deux géodésiques ont toujours au moins un point d'intersection a longtemps été considérée comme inacceptable, notamment par Lobatchevski et Bolyai, car elle contraignait l'espace à être clos.

L'Allemand Bernhard Riemann (1827-1866) la rendra légitime en introduisant

en un point O , de rayon 1 et privé du cercle $\mathcal{C}$ qui le délimite. Sur ce disque « ouvert », on change les règles métriques en imposant une nouvelle façon de calculer les longueurs des chemins. Dans le plan euclidien, on calcule la longueur d'une portion de courbe en l'approchant par celle d'une ligne polygonale composée de segments de droite de plus en plus nombreux et courts, c'est-à-dire tels que la ligne brisée épouse de plus en plus finement la courbe. Il en est de même pour la longueur d'un chemin dans le disque hyperbolique. Pour définir d'une nouvelle façon les longueurs sur le disque hyperbolique $\mathcal{D}$, il suffit donc de spécifier la longueur d'un segment infinitésimal

mal $[M, N]$, où M et N sont deux points de $\mathcal{D}$ très voisins.

La «longueur hyperbolique» du segment $[M, N]$ que l'on impose est un multiple de sa longueur euclidienne MN , avec un facteur qui dépend de la position du point M . Plus précisément, sa valeur est par définition égale à $MN/(1 - OM^2)$ (voir la figure 2c). Si M est proche de O , cette longueur hyperbolique est comparable à MN , puisque le nombre $1 - OM^2$ est presque égal à 1. Mais si M s'approche du cercle $\mathcal{C}$, ce nombre tend vers 0 et la longueur hyperbolique de $[M, N]$ devient de plus en plus grande, bien que, du point de vue euclidien, N soit très voisin de M .

La notion de longueur sur un espace est fondamentale en géométrie. Elle permet de caractériser des courbes particulières, les géodésiques, qui portent les chemins les plus courts entre deux points. Dans le plan euclidien, il s'agit des droites; sur la

dien (voir la figure 2d). En revanche, sa longueur hyperbolique est différente de sa longueur euclidienne, puisqu'elle tend vers l'infini lorsque le point M est fixé et que N s'approche du cercle $\mathcal{C}$. Un habitant du disque hyperbolique partant de O n'atteint donc jamais ce cercle en un temps fini.

Dans cette nouvelle géométrie, l'énoncé du cinquième postulat d'Euclide n'est pas vérifié. Il y existe en effet une infinité de géodésiques passant par le point O (des diamètres) qui ne rencontrent pas un arc de cercle fixé. En d'autres termes, il existe une infinité de géodésiques distinctes de l'arc de cercle en question et qui lui sont «parallèles» (voir la figure 2e).

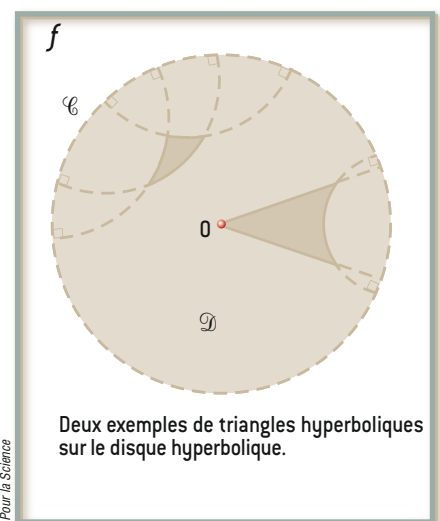
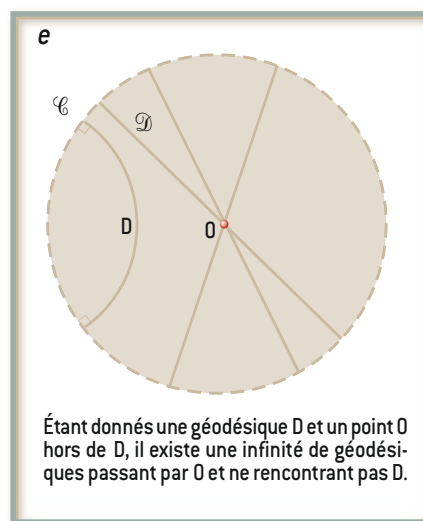
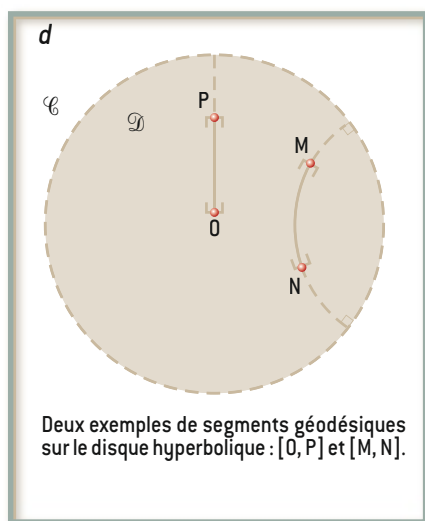
L'existence de telles configurations non euclidiennes a des conséquences troublantes sur les triangles hyperboliques, ces figures du disque hyperbolique dont les trois côtés sont des géodésiques (voir la figure 2f):

L'AUTEUR



Françoise DAL'BO-MILONET est professeur des universités en mathématiques et responsable du Groupement de recherche CNRS de géométrie ergodique nommé «Platon». Elle effectue ses recherches à l'Institut de recherches mathématiques de Rennes (IRMAR).

2. QUELQUES CARACTÉRISTIQUES du plan euclidien (a) et de deux espaces non euclidiens : la sphère (b) et le disque hyperbolique (c, d, e, f).



sphère, nous l'avons déjà mentionné, ce sont les grands cercles. Dans le disque hyperbolique, on montre que les géodésiques sont de deux types : d'une part les demi-cercles perpendiculaires au cercle $\mathcal{C}$, d'autre part les diamètres (euclidiens) de ce cercle.

Longueurs euclidienne et hyperbolique

Plus précisément, si M et N ne sont pas alignés avec le point O , parmi tous les chemins de $\mathcal{D}$ qui relient M à N , celui qui a la plus petite longueur hyperbolique est porté par un arc de cercle. Si M , N et O sont alignés, ce chemin géodésique est le segment $[M, N]$, comme dans le plan eucli-

la somme de leurs angles est strictement inférieure à 180 degrés. De plus, cette somme peut prendre toutes les valeurs comprises strictement entre 0 et 180 degrés, contrairement à celle d'un triangle euclidien qui est constante, égale à 180 degrés ! C'est le premier signe d'une géométrie plus souple, moins contraignante que celle du plan euclidien.

Comme il est repoussé à l'infini, le cercle $\mathcal{C}$ n'a pas d'existence concrète dans le monde hyperbolique, alors qu'il en a une dans le monde euclidien. Comment interpréter ce cercle immatériel en termes hyperboliques ? Imaginons que le point O soit, dans le disque hyperbolique, une source lumineuse qui émet dans toutes les

directions. La lumière se propage le long des chemins géodésiques. Parce qu'ils sont issus de O , ces chemins lumineux sont les segments de la forme $[O, \omega]$, où ω est un point du cercle $\mathcal{C}$. La longueur hyperbolique de $[O, \omega]$ étant infinie, on peut assimiler ω à un point sur l'horizon.

Ainsi, en associant à chaque rayon de lumière infini $[O, \omega]$ le point ω , on établit une correspondance entre l'ensemble des rayons et le cercle $\mathcal{C}$ (voir la figure 3). Sous cet angle, un point de $\mathcal{C}$ prend un sens «concret» hyperbolique : c'est un rayon de lumière hyperbolique issu de la source O . Dans le même esprit, on construit une correspondance entre les rayons de lumière hyperboliques de longueur finie émis