

mal $[M, N]$, où M et N sont deux points de $\mathcal{D}$ très voisins.

La «longueur hyperbolique» du segment $[M, N]$ que l'on impose est un multiple de sa longueur euclidienne MN , avec un facteur qui dépend de la position du point M . Plus précisément, sa valeur est par définition égale à $MN/(1 - OM^2)$ (voir la figure 2c). Si M est proche de O , cette longueur hyperbolique est comparable à MN , puisque le nombre $1 - OM^2$ est presque égal à 1. Mais si M s'approche du cercle $\mathcal{C}$, ce nombre tend vers 0 et la longueur hyperbolique de $[M, N]$ devient de plus en plus grande, bien que, du point de vue euclidien, N soit très voisin de M .

La notion de longueur sur un espace est fondamentale en géométrie. Elle permet de caractériser des courbes particulières, les géodésiques, qui portent les chemins les plus courts entre deux points. Dans le plan euclidien, il s'agit des droites; sur la

dien (voir la figure 2d). En revanche, sa longueur hyperbolique est différente de sa longueur euclidienne, puisqu'elle tend vers l'infini lorsque le point M est fixé et que N s'approche du cercle $\mathcal{C}$. Un habitant du disque hyperbolique partant de O n'atteint donc jamais ce cercle en un temps fini.

Dans cette nouvelle géométrie, l'énoncé du cinquième postulat d'Euclide n'est pas vérifié. Il y existe en effet une infinité de géodésiques passant par le point O (des diamètres) qui ne rencontrent pas un arc de cercle fixé. En d'autres termes, il existe une infinité de géodésiques distinctes de l'arc de cercle en question et qui lui sont «parallèles» (voir la figure 2e).

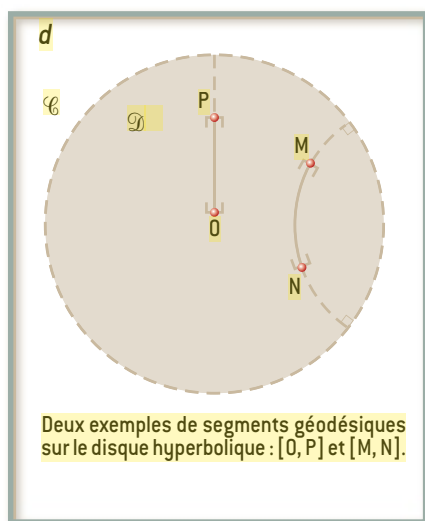
L'existence de telles configurations non euclidiennes a des conséquences troublantes sur les triangles hyperboliques, ces figures du disque hyperbolique dont les trois côtés sont des géodésiques (voir la figure 2f):

L'AUTEUR

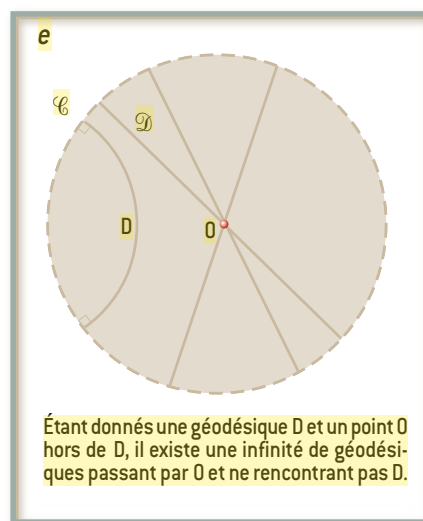


Françoise DAL'BO-MILONET est professeur des universités en mathématiques et responsable du Groupement de recherche CNRS de géométrie ergodique nommé «Platon». Elle effectue ses recherches à l'Institut de recherches mathématiques de Rennes (IRMAR).

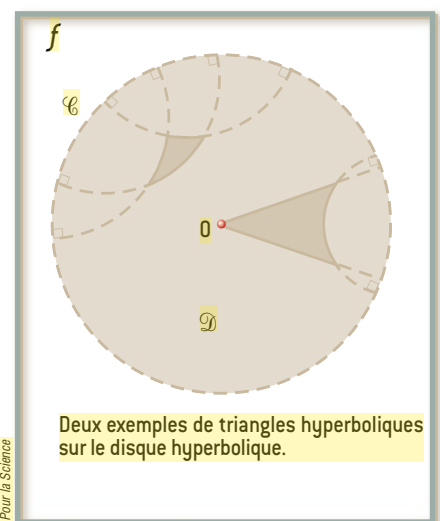
2. QUELQUES CARACTÉRISTIQUES du plan euclidien [a] et de deux espaces non euclidiens : la sphère [b] et le disque hyperbolique [c, d, e, f].



Deux exemples de segments géodésiques sur le disque hyperbolique : $[O, P]$ et $[M, N]$.



Étant donné une géodésique D et un point O hors de D , il existe une infinité de géodésiques passant par O et ne rencontrant pas D .



Deux exemples de triangles hyperboliques sur le disque hyperbolique.

sphère, nous l'avons déjà mentionné, ce sont les grands cercles. Dans le disque hyperbolique, on montre que les géodésiques sont de deux types : d'une part les demi-cercles perpendiculaires au cercle $\mathcal{C}$, d'autre part les diamètres (euclidiens) de ce cercle.

Longueurs euclidienne et hyperbolique

Plus précisément, si M et N ne sont pas alignés avec le point O , parmi tous les chemins de $\mathcal{D}$ qui relient M à N , celui qui a la plus petite longueur hyperbolique est porté par un arc de cercle. Si M , N et O sont alignés, ce chemin géodésique est le segment $[M, N]$, comme dans le plan eucli-

la somme de leurs angles est strictement inférieure à 180 degrés. De plus, cette somme peut prendre toutes les valeurs comprises strictement entre 0 et 180 degrés, contrairement à celle d'un triangle euclidien qui est constante, égale à 180 degrés ! C'est le premier signe d'une géométrie plus souple, moins contraignante que celle du plan euclidien.

Comme il est repoussé à l'infini, le cercle $\mathcal{C}$ n'a pas d'existence concrète dans le monde hyperbolique, alors qu'il en a une dans le monde euclidien. Comment interpréter ce cercle immatériel en termes hyperboliques ? Imaginons que le point O soit, dans le disque hyperbolique, une source lumineuse qui émet dans toutes les

directions. La lumière se propage le long des chemins géodésiques. Parce qu'ils sont issus de O , ces chemins lumineux sont les segments de la forme $[O, \omega]$, où ω est un point du cercle $\mathcal{C}$. La longueur hyperbolique de $[O, \omega]$ étant infinie, on peut assimiler ω à un point sur l'horizon.

Ainsi, en associant à chaque rayon de lumière infini $[O, \omega]$ le point ω , on établit une correspondance entre l'ensemble des rayons et le cercle $\mathcal{C}$ (voir la figure 3). Sous cet angle, un point de $\mathcal{C}$ prend un sens «concret» hyperbolique : c'est un rayon de lumière hyperbolique issu de la source O . Dans le même esprit, on construit une correspondance entre les rayons de lumière hyperboliques de longueur finie émis