

mal $[M, N]$, où M et N sont deux points de $\mathcal{D}$ très voisins.

La «longueur hyperbolique» du segment $[M, N]$ que l'on impose est un multiple de sa longueur euclidienne MN , avec un facteur qui dépend de la position du point M . Plus précisément, sa valeur est par définition égale à $MN/(1 - OM^2)$ (voir la figure 2c). Si M est proche de O , cette longueur hyperbolique est comparable à MN , puisque le nombre $1 - OM^2$ est presque égal à 1. Mais si M s'approche du cercle $\mathcal{C}$, ce nombre tend vers 0 et la longueur hyperbolique de $[M, N]$ devient de plus en plus grande, bien que, du point de vue euclidien, N soit très voisin de M .

La notion de longueur sur un espace est fondamentale en géométrie. Elle permet de caractériser des courbes particulières, les géodésiques, qui portent les chemins les plus courts entre deux points. Dans le plan euclidien, il s'agit des droites; sur la

dien (voir la figure 2d). En revanche, sa longueur hyperbolique est différente de sa longueur euclidienne, puisqu'elle tend vers l'infini lorsque le point M est fixé et que N s'approche du cercle $\mathcal{C}$. Un habitant du disque hyperbolique partant de O n'atteint donc jamais ce cercle en un temps fini.

Dans cette nouvelle géométrie, l'énoncé du cinquième postulat d'Euclide n'est pas vérifié. Il y existe en effet une infinité de géodésiques passant par le point O (des diamètres) qui ne rencontrent pas un arc de cercle fixé. En d'autres termes, il existe une infinité de géodésiques distinctes de l'arc de cercle en question et qui lui sont «parallèles» (voir la figure 2e).

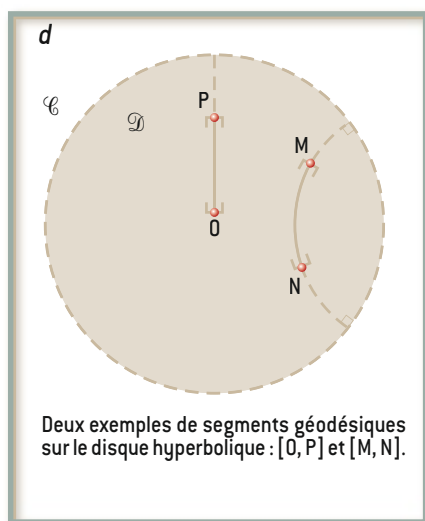
L'existence de telles configurations non euclidiennes a des conséquences troublantes sur les triangles hyperboliques, ces figures du disque hyperbolique dont les trois côtés sont des géodésiques (voir la figure 2f):

L'AUTEUR

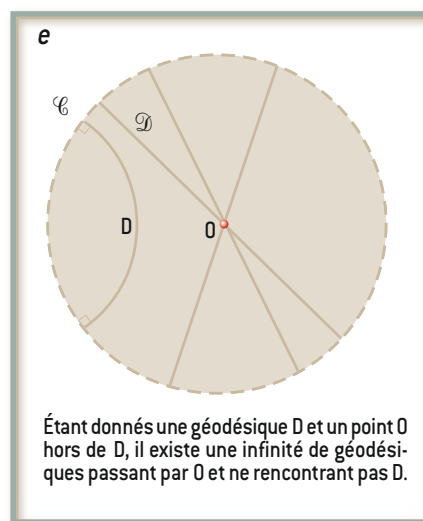


Françoise DAL'BO-MILONET est professeur des universités en mathématiques et responsable du Groupement de recherche CNRS de géométrie ergodique nommé «Platon». Elle effectue ses recherches à l'Institut de recherches mathématiques de Rennes (IRMAR).

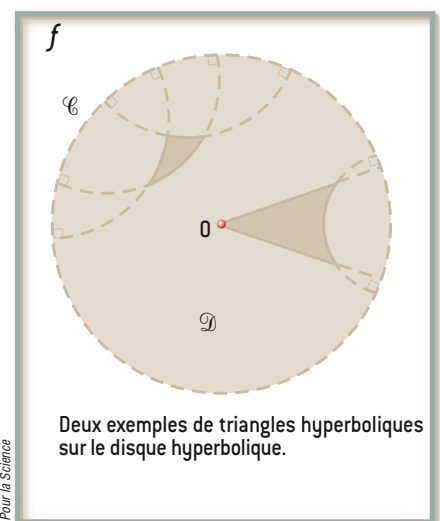
2. QUELQUES CARACTÉRISTIQUES du plan euclidien [a] et de deux espaces non euclidiens : la sphère [b] et le disque hyperbolique [c, d, e, f].



Deux exemples de segments géodésiques sur le disque hyperbolique : $[O, P]$ et $[M, N]$.



Étant donné une géodésique D et un point O hors de D , il existe une infinité de géodésiques passant par O et ne rencontrant pas D .



Deux exemples de triangles hyperboliques sur le disque hyperbolique.

sphère, nous l'avons déjà mentionné, ce sont les grands cercles. Dans le disque hyperbolique, on montre que les géodésiques sont de deux types : d'une part les demi-cercles perpendiculaires au cercle $\mathcal{C}$, d'autre part les diamètres (euclidiens) de ce cercle.

Longueurs euclidienne et hyperbolique

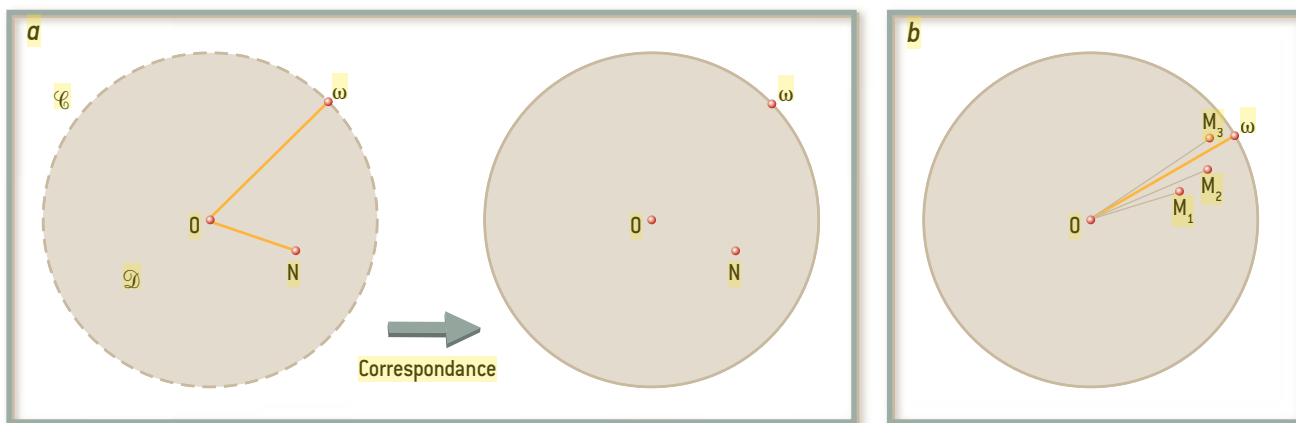
Plus précisément, si M et N ne sont pas alignés avec le point O , parmi tous les chemins de $\mathcal{D}$ qui relient M à N , celui qui a la plus petite longueur hyperbolique est porté par un arc de cercle. Si M , N et O sont alignés, ce chemin géodésique est le segment $[M, N]$, comme dans le plan eucli-

dien. La somme de leurs angles est strictement inférieure à 180 degrés. De plus, cette somme peut prendre toutes les valeurs comprises strictement entre 0 et 180 degrés, contrairement à celle d'un triangle euclidien qui est constante, égale à 180 degrés ! C'est le premier signe d'une géométrie plus souple, moins contraignante que celle du plan euclidien.

Comme il est repoussé à l'infini, le cercle $\mathcal{C}$ n'a pas d'existence concrète dans le monde hyperbolique, alors qu'il en a une dans le monde euclidien. Comment interpréter ce cercle immatériel en termes hyperboliques ? Imaginons que le point O soit, dans le disque hyperbolique, une source lumineuse qui émet dans toutes les

directions. La lumière se propage le long des chemins géodésiques. Parce qu'ils sont issus de O , ces chemins lumineux sont les segments de la forme $[O, \omega]$, où ω est un point du cercle $\mathcal{C}$. La longueur hyperbolique de $[O, \omega]$ étant infinie, on peut assimiler ω à un point sur l'horizon.

Ainsi, en associant à chaque rayon de lumière infini $[O, \omega]$ le point ω , on établit une correspondance entre l'ensemble des rayons et le cercle $\mathcal{C}$ (voir la figure 3). Sous cet angle, un point de $\mathcal{C}$ prend un sens «concret» hyperbolique : c'est un rayon de lumière hyperbolique issu de la source O . Dans le même esprit, on construit une correspondance entre les rayons de lumière hyperboliques de longueur finie émis



3. EN ASSOCIANT À CHAQUE RAYON LUMINEUX issu de O le point ω de l'horizon $\mathcal{C}$ vers lequel il se dirige, on établit une correspondance entre l'ensemble des rayons $[O, \omega[$ de longueur hyperbolique infinie et le cercle $\mathcal{C}$. De même, on fait correspondre à chaque rayon $[O, N]$ de longueur hyperbolique finie son extrémité N . En identifiant ainsi les

points aux rayons, finis ou infinis, le disque hyperbolique devient une partie d'un espace plus grand et clos, qui contient son horizon *[a]*. Dans cet espace, des points M sont dits visuellement proches de ω quand l'angle en O entre $[O, M]$ et $[O, \omega]$ est petit et la distance hyperbolique de $[O, M]$ grande *[b]*.

par O , autrement dit les segments $[O, N]$, où N est un point de $\mathcal{D}$, et le disque hyperbolique : à un tel rayon, on associe son point d'arrêt N (voir la figure 3a).

Le grand intérêt de cette approche par les rayons est d'apporter une vue hyperbolique unifiée du disque $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$: leurs points sont identifiés à des rayons lumineux émis par la source O , que ces rayons soient de longueur finie ou infinie. En adoptant ce nouveau point de vue, le disque hyperbolique devient une partie d'un espace plus grand mais clos, un espace « compact » qui contient son horizon.

Le rôle principal de cet espace, que l'on peut représenter par la réunion du disque $\mathcal{D}$ et de son horizon $\mathcal{C}$, est de « compactifier » le disque, autrement dit de capturer son infini en donnant une limite à des suites de points qui divergent dans $\mathcal{D}$.

Pour que le concept de limite ait un sens dans ce nouvel espace, on introduit une notion de points « visuellement pro-

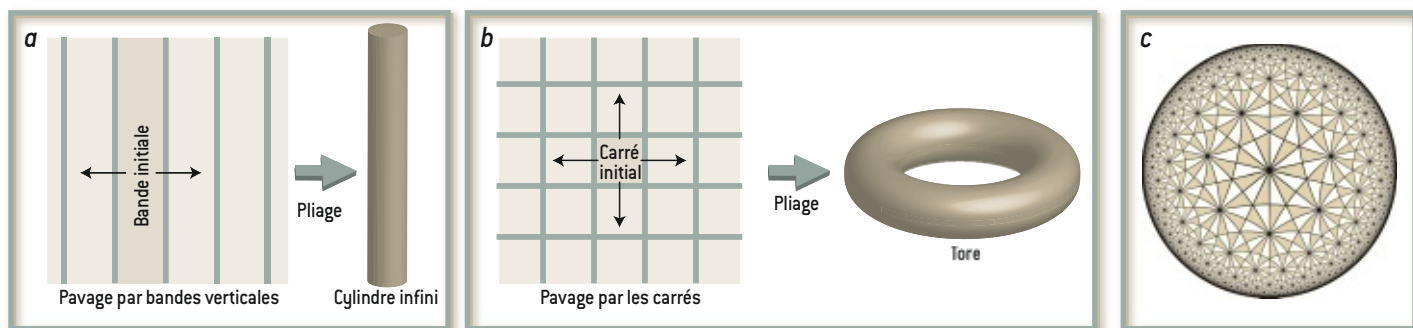
ches » qui vient contourner le problème de distance infinie entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$. Concrètement, on dira qu'un point M de $\mathcal{D}$ et un point ω de $\mathcal{C}$ sont proches si, d'une part, l'angle en O entre le rayon de lumière fini $[O, M]$ et le rayon infini $[O, \omega]$ est petit, et si, d'autre part, la longueur hyperbolique de $[O, M]$ est grande (voir la figure 3b).

Le bord visuel, un miroir de l'espace

Dans cet espace topologique, une suite de points M de $\mathcal{D}$ qui s'éloignent de O le long d'un rayon infini $[O, \omega]$, ou en restant visuellement proches de celui-ci, converge vers un point ω de cet espace, alors qu'elle diverge dans $\mathcal{D}$ (puisque ω n'est pas un point de $\mathcal{D}$). L'infini du disque hyperbolique est ainsi neutralisé, matérialisé par son « bord visuel », à savoir le cercle $\mathcal{C}$ considéré comme l'ensemble des rayons lumineux infinis émis par la source O .

Cette construction d'un bord visuel destiné à clore un espace géométrique s'est pleinement intégrée aux mathématiques à partir des années 1970, notamment grâce aux travaux de l'Américain Patrick Eberlein. Dans le cas le plus simple où cet espace est le plan euclidien, ce bord peut être représenté par un cercle, comme pour le disque hyperbolique. On s'en convainc en traçant un cercle autour d'une source de lumière du plan, et en associant à chaque rayon lumineux son point de rencontre avec ce cercle (voir la figure 4).

Ces bords mettent en évidence des liens entre des espaces qui étaient considérés comme étrangers l'un à l'autre. C'est ainsi que la sphère, illégitime en tant qu'espace géométrique jusqu'au XIX^e siècle, se révèle intimement liée à notre espace euclidien, au sens où elle traduit la géométrie de son horizon. On sait aujourd'hui que, dans de nombreux



5. LE PAVAGE DU PLAN AVEC DES BANDES PARALLÈLES permet de construire, en faisant se rejoindre les deux directions de translation horizontale, un cylindre de hauteur infinie *[a]*. Le pavage par des carrés per-

met de même, par « pliage » le long des directions de translation horizontale puis verticale, de construire un tore *[b]*. Les transformations permettant de paver de façon régulière le disque hyperbolique sont plus difficiles