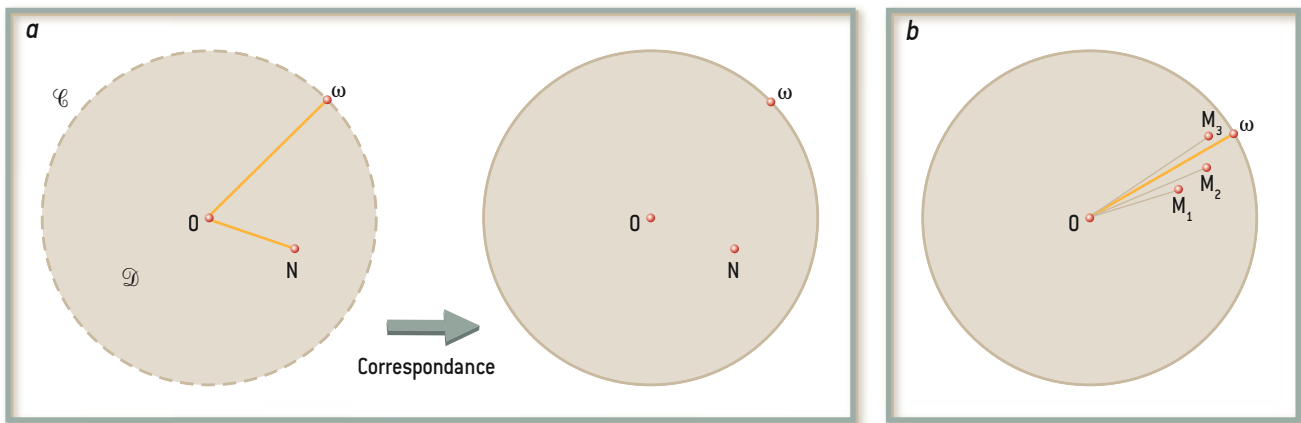




3. EN ASSOCIANT À CHAQUE RAYON LUMINEUX issu de O le point ω de l'horizon $\mathcal{C}$ vers lequel il se dirige, on établit une correspondance entre l'ensemble des rayons $[O, \omega[$ de longueur hyperbolique infinie et le cercle $\mathcal{C}$. De même, on fait correspondre à chaque rayon $[O, N]$ de longueur hyperbolique finie son extrémité N . En identifiant ainsi les

points aux rayons, finis ou infinis, le disque hyperbolique devient une partie d'un espace plus grand et clos, qui contient son horizon *[a]*. Dans cet espace, des points M sont dits visuellement proches de ω quand l'angle en O entre $[O, M]$ et $[O, \omega]$ est petit et la distance hyperbolique de $[O, M]$ grande *[b]*.

par O , autrement dit les segments $[O, N]$, où N est un point de $\mathcal{D}$, et le disque hyperbolique : à un tel rayon, on associe son point d'arrêt N (voir la figure 3a).

Le grand intérêt de cette approche par les rayons est d'apporter une vue hyperbolique unifiée du disque $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$: leurs points sont identifiés à des rayons lumineux émis par la source O , que ces rayons soient de longueur finie ou infinie. En adoptant ce nouveau point de vue, le disque hyperbolique devient une partie d'un espace plus grand mais clos, un espace « compact » qui contient son horizon.

Le rôle principal de cet espace, que l'on peut représenter par la réunion du disque $\mathcal{D}$ et de son horizon $\mathcal{C}$, est de « compactifier » le disque, autrement dit de capturer son infini en donnant une limite à des suites de points qui divergent dans $\mathcal{D}$.

Pour que le concept de limite ait un sens dans ce nouvel espace, on introduit une notion de points « visuellement pro-

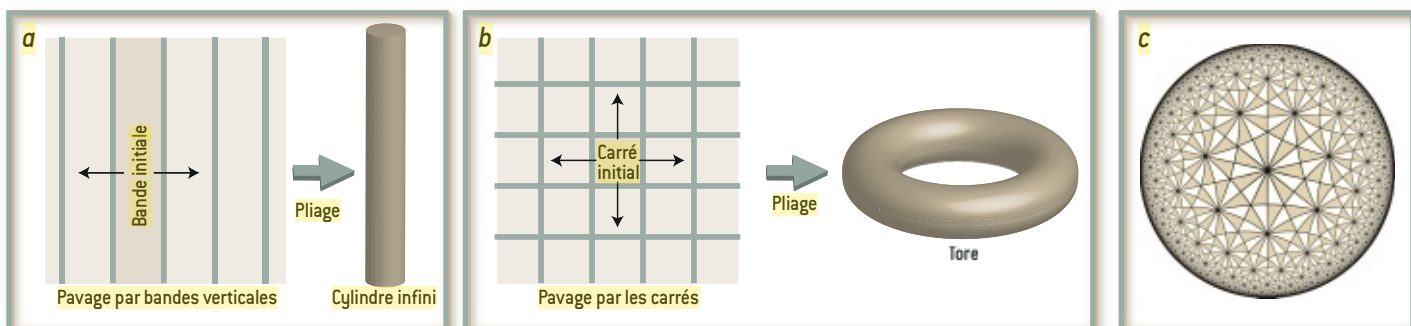
ches » qui vient contourner le problème de distance infinie entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$. Concrètement, on dira qu'un point M de $\mathcal{D}$ et un point ω de $\mathcal{C}$ sont proches si, d'une part, l'angle en O entre le rayon de lumière fini $[O, M]$ et le rayon infini $[O, \omega]$ est petit, et si, d'autre part, la longueur hyperbolique de $[O, M]$ est grande (voir la figure 3b).

Le bord visuel, un miroir de l'espace

Dans cet espace topologique, une suite de points M de $\mathcal{D}$ qui s'éloignent de O le long d'un rayon infini $[O, \omega]$, ou en restant visuellement proches de celui-ci, converge vers un point ω de cet espace, alors qu'elle diverge dans $\mathcal{D}$ (puisque ω n'est pas un point de $\mathcal{D}$). L'infini du disque hyperbolique est ainsi neutralisé, matérialisé par son « bord visuel », à savoir le cercle $\mathcal{C}$ considéré comme l'ensemble des rayons lumineux infinis émis par la source O .

Cette construction d'un bord visuel destiné à clore un espace géométrique s'est pleinement intégrée aux mathématiques à partir des années 1970, notamment grâce aux travaux de l'Américain Patrick Eberlein. Dans le cas le plus simple où cet espace est le plan euclidien, ce bord peut être représenté par un cercle, comme pour le disque hyperbolique. On s'en convainc en traçant un cercle autour d'une source de lumière du plan, et en associant à chaque rayon lumineux son point de rencontre avec ce cercle (voir la figure 4).

Ces bords mettent en évidence des liens entre des espaces qui étaient considérés comme étrangers l'un à l'autre. C'est ainsi que la sphère, illégitime en tant qu'espace géométrique jusqu'au XIX^e siècle, se révèle intimement liée à notre espace euclidien, au sens où elle traduit la géométrie de son horizon. On sait aujourd'hui que, dans de nombreux



5. LE PAVAGE DU PLAN AVEC DES BANDES PARALLÈLES permet de construire, en faisant se rejoindre les deux directions de translation horizontale, un cylindre de hauteur infinie *[a]*. Le pavage par des carrés per-

met de même, par « pliage » le long des directions de translation horizontale puis verticale, de construire un tore *[b]*. Les transformations permettant de paver de façon régulière le disque hyperbolique sont plus difficiles

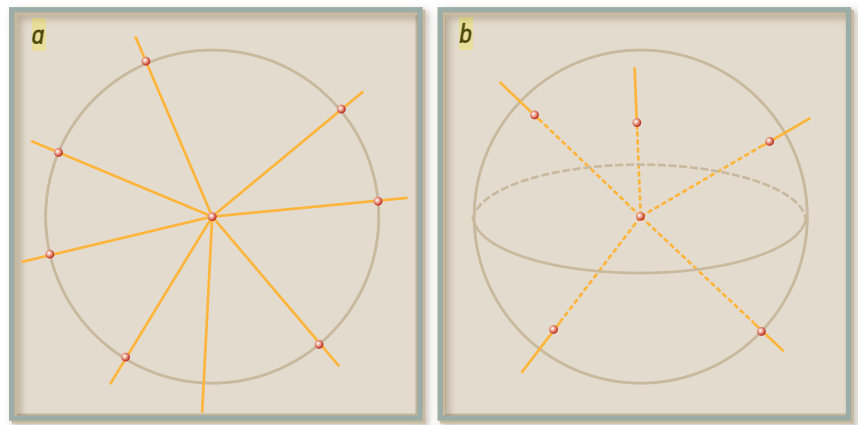
cas, le bord visuel porte de précieuses informations sur l'espace qu'il enserme. Par exemple, le cercle est le bord du plan euclidien et du disque, car ces deux espaces sont de dimension 2. Le bord d'un espace de dimension 3, tel l'espace euclidien, est une sphère. Des informations plus subtiles sont accessibles, d'autres restent à découvrir.

Le bord visuel est une invention théorique qui constitue une magnifique passerelle entre l'imagination et le raisonnement. Le géomètre s'en sert notamment pour étudier des problèmes posés dans un espace illimité, problèmes qui, grâce au bord visuel, se transcrivent sur un espace compact de plus petite dimension. Cette démarche est particulièrement fructueuse dans l'étude des pavages.

D'un pavage régulier à son ensemble limite

«Paver» un espace géométrique consiste à le recouvrir par des motifs qui ne se chevauchent pas, comme on le fait pour carrelé un sol. Le pavage est dit régulier s'il est obtenu en déplaçant un pavé initial par des transformations, qualifiées de déplacements, qui ne modifient ni la taille ni la forme du pavé. Son étude se résume essentiellement à celle de l'ensemble des déplacements qu'il met en jeu, ensemble nommé groupe paveur. Comment construire un tel groupe ?

Les groupes paveurs du plan euclidien sont bien connus. Ils sont en nombre fini. Leurs déplacements comprennent des rotations ou des translations. Par exemple, un pavage du plan peut être obtenu en appliquant à une bande verticale d'épaisseur unité le groupe des translations horizontales de longueur entière, ou encore en



4. LE CERCLE EST LE BORD VISUEL du plan euclidien (a), tandis que la sphère est le bord visuel de l'espace euclidien (b). Le bord visuel est un concept qui permet de clore un espace géométrique.

appliquant à un carré le groupe des translations entières, horizontales et verticales (voir les figures 5a et 5b).

Dans le cas du disque hyperbolique, les groupes paveurs sont plus difficiles à décrire et sont en nombre infini. Un exemple est construit en prenant, pour motif initial, un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets sont de la forme $180^\circ/p$, $180^\circ/q$ et $180^\circ/r$, où p , q et r sont des entiers positifs vérifiant $1/p + 1/q + 1/r < 1$, ce qui garantit que la somme des angles soit inférieure à 180° . Les triangles se répètent alors sur le disque hyperbolique en devenant de plus en plus petits du point de vue euclidien, bien qu'ils gardent la même taille si on les mesure à l'aune de la longueur hyperbolique (voir la figure 5c).

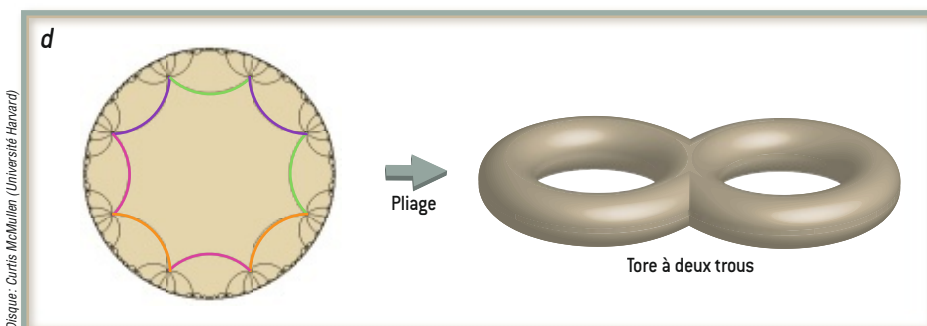
Il y a une quarantaine d'années, les mathématiciens ont introduit la notion d'«ensemble limite» d'un pavage régulier. Il s'agit d'un ensemble de points appartenant au bord visuel de l'espace et qui reflète la façon dont un point O de l'espace s'échappe à l'infini lorsqu'on le

déplace à l'aide des transformations du groupe paveur. Imaginons que les points de cette trajectoire soient peints en rouge, et intéressons-nous à ceux qui s'éloignent de O. Pour un observateur immobile, ces points s'accumulent à l'infini sur une partie rouge de son horizon : c'est l'ensemble limite du pavage.

Quelle est la nature de cet ensemble limite ? Pour un pavage régulier du plan euclidien, cet ensemble est soit formé d'un nombre fini de points, soit égal à tout le bord visuel, c'est-à-dire au cercle. Le premier cas est illustré par le pavage en bandes verticales : la trajectoire de O étant portée par la droite horizontale passant par ce point, ses points limites sont les deux «extrémités» à l'infini de cette droite (voir la figure 6a).

Le pavage régulier par des carrés illustre le deuxième cas. On montre que, obtenue par les translations entières horizontales et verticales, la trajectoire de O croise une infinité de fois toute droite de pente rationnelle passant par O. En poussant plus loin le raisonnement et en utilisant le fait que les nombres rationnels sont très nombreux dans l'ensemble de tous les nombres, on obtient que la «trace à l'infini» de cette trajectoire coïncide avec le bord visuel (voir la figure 6b).

Dans le disque hyperbolique, il existe aussi des pavages réguliers dont l'ensemble limite est constitué d'un nombre fini de points, ou encore égal à tout le cercle à l'infini. Mais, à la différence des pavages euclidiens, un troisième cas s'ajoute : celui d'une multitude de pavages réguliers dont les ensembles limites sont de nature fractale (voir la figure 6c). Ces ensembles, mines d'or de la géométrie hyperbolique, illustrent encore une fois la souplesse de cette géométrie.



à décrire. Ce disque peut être pavé d'une infinité de façons différentes, par des triangles (c, par exemple), par des octogones (d), etc. Avec le pavage par des octogones, le pliage le long de directions définies par les paires de côtés de l'octogone central de même couleur crée un tore à deux trous.