

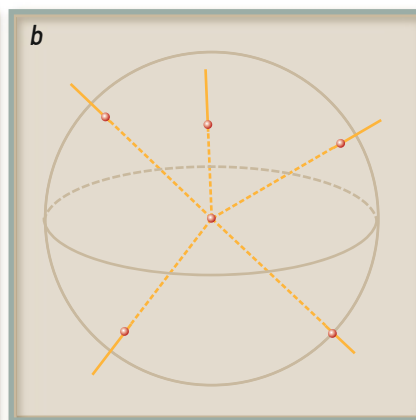
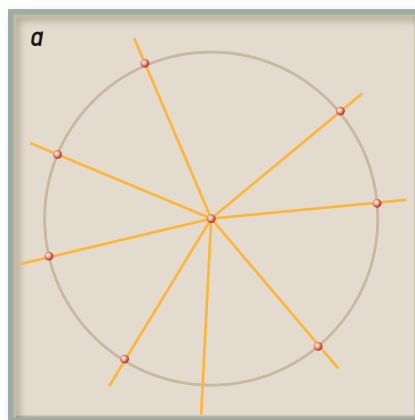
cas, le bord visuel porte de précieuses informations sur l'espace qu'il enserme. Par exemple, le cercle est le bord du plan euclidien et du disque, car ces deux espaces sont de dimension 2. Le bord d'un espace de dimension 3, tel l'espace euclidien, est une sphère. Des informations plus subtiles sont accessibles, d'autres restent à découvrir.

Le bord visuel est une invention théorique qui constitue une magnifique passerelle entre l'imagination et le raisonnement. Le géomètre s'en sert notamment pour étudier des problèmes posés dans un espace illimité, problèmes qui, grâce au bord visuel, se transcrivent sur un espace compact de plus petite dimension. Cette démarche est particulièrement fructueuse dans l'étude des pavages.

D'un pavage régulier à son ensemble limite

«Paver» un espace géométrique consiste à le recouvrir par des motifs qui ne se chevauchent pas, comme on le fait pour carrelé un sol. Le pavage est dit régulier s'il est obtenu en déplaçant un pavé initial par des transformations, qualifiées de déplacements, qui ne modifient ni la taille ni la forme du pavé. Son étude se résume essentiellement à celle de l'ensemble des déplacements qu'il met en jeu, ensemble nommé groupe paveur. Comment construire un tel groupe ?

Les groupes paveurs du plan euclidien sont bien connus. Ils sont en nombre fini. Leurs déplacements comprennent des rotations ou des translations. Par exemple, un pavage du plan peut être obtenu en appliquant à une bande verticale d'épaisseur unité le groupe des translations horizontales de longueur entière, ou encore en



4. LE CERCLE EST LE BORD VISUEL du plan euclidien (a), tandis que la sphère est le bord visuel de l'espace euclidien (b). Le bord visuel est un concept qui permet de clore un espace géométrique.

appliquant à un carré le groupe des translations entières, horizontales et verticales (voir les figures 5a et 5b).

Dans le cas du disque hyperbolique, les groupes paveurs sont plus difficiles à décrire et sont en nombre infini. Un exemple est construit en prenant, pour motif initial, un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets sont de la forme $180^\circ/p$, $180^\circ/q$ et $180^\circ/r$, où p , q et r sont des entiers positifs vérifiant $1/p + 1/q + 1/r < 1$, ce qui garantit que la somme des angles soit inférieure à 180° . Les triangles se répètent alors sur le disque hyperbolique en devenant de plus en plus petits du point de vue euclidien, bien qu'ils gardent la même taille si on les mesure à l'aune de la longueur hyperbolique (voir la figure 5c).

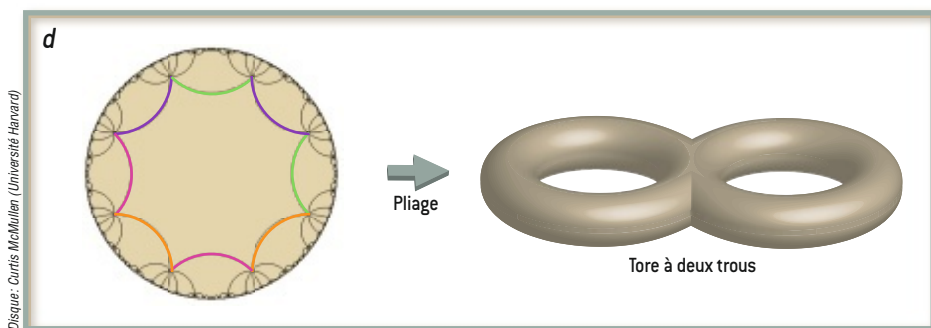
Il y a une quarantaine d'années, les mathématiciens ont introduit la notion d'«ensemble limite» d'un pavage régulier. Il s'agit d'un ensemble de points appartenant au bord visuel de l'espace et qui reflète la façon dont un point O de l'espace s'échappe à l'infini lorsqu'on le

déplace à l'aide des transformations du groupe paveur. Imaginons que les points de cette trajectoire soient peints en rouge, et intéressons-nous à ceux qui s'éloignent de O. Pour un observateur immobile, ces points s'accumulent à l'infini sur une partie rouge de son horizon : c'est l'ensemble limite du pavage.

Quelle est la nature de cet ensemble limite ? Pour un pavage régulier du plan euclidien, cet ensemble est soit formé d'un nombre fini de points, soit égal à tout le bord visuel, c'est-à-dire au cercle. Le premier cas est illustré par le pavage en bandes verticales : la trajectoire de O étant portée par la droite horizontale passant par ce point, ses points limites sont les deux «extrémités» à l'infini de cette droite (voir la figure 6a).

Le pavage régulier par des carrés illustre le deuxième cas. On montre que, obtenue par les translations entières horizontales et verticales, la trajectoire de O croise une infinité de fois toute droite de pente rationnelle passant par O. En poussant plus loin le raisonnement et en utilisant le fait que les nombres rationnels sont très nombreux dans l'ensemble de tous les nombres, on obtient que la «trace à l'infini» de cette trajectoire coïncide avec le bord visuel (voir la figure 6b).

Dans le disque hyperbolique, il existe aussi des pavages réguliers dont l'ensemble limite est constitué d'un nombre fini de points, ou encore égal à tout le cercle à l'infini. Mais, à la différence des pavages euclidiens, un troisième cas s'ajoute : celui d'une multitude de pavages réguliers dont les ensembles limites sont de nature fractale (voir la figure 6c). Ces ensembles, mines d'or de la géométrie hyperbolique, illustrent encore une fois la souplesse de cette géométrie.



à décrire. Ce disque peut être pavé d'une infinité de façons différentes, par des triangles (c, par exemple), par des octogones (d), etc. Avec le pavage par des octogones, le pliage le long de directions définies par les paires de côtés de l'octogone central de même couleur crée un tore à deux trous.