

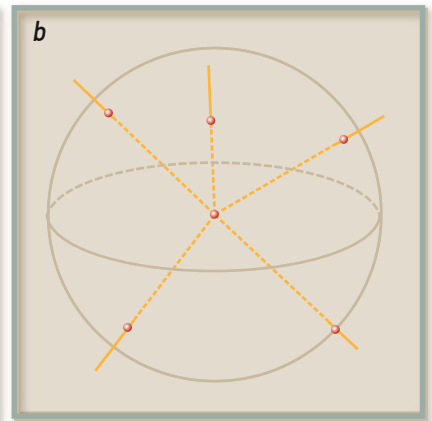
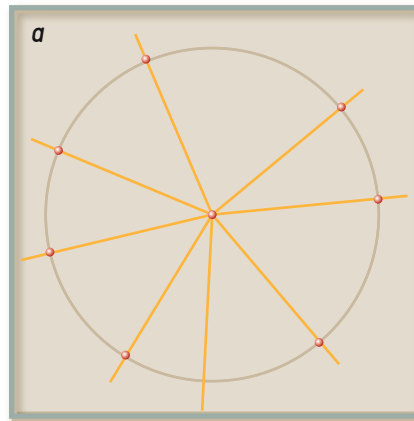
cas, le bord visuel porte de précieuses informations sur l'espace qu'il enserme. Par exemple, le cercle est le bord du plan euclidien et du disque, car ces deux espaces sont de dimension 2. Le bord d'un espace de dimension 3, tel l'espace euclidien, est une sphère. Des informations plus subtiles sont accessibles, d'autres restent à découvrir.

Le bord visuel est une invention théorique qui constitue une magnifique passerelle entre l'imagination et le raisonnement. Le géomètre s'en sert notamment pour étudier des problèmes posés dans un espace illimité, problèmes qui, grâce au bord visuel, se transcrivent sur un espace compact de plus petite dimension. Cette démarche est particulièrement fructueuse dans l'étude des pavages.

D'un pavage régulier à son ensemble limite

«Paver» un espace géométrique consiste à le recouvrir par des motifs qui ne se chevauchent pas, comme on le fait pour carrelé un sol. Le pavage est dit régulier s'il est obtenu en déplaçant un pavé initial par des transformations, qualifiées de déplacements, qui ne modifient ni la taille ni la forme du pavé. Son étude se résume essentiellement à celle de l'ensemble des déplacements qu'il met en jeu, ensemble nommé groupe paveur. Comment construire un tel groupe ?

Les groupes paveurs du plan euclidien sont bien connus. Ils sont en nombre fini. Leurs déplacements comprennent des rotations ou des translations. Par exemple, un pavage du plan peut être obtenu en appliquant à une bande verticale d'épaisseur unité le groupe des translations horizontales de longueur entière, ou encore en



4. LE CERCLE EST LE BORD VISUEL du plan euclidien *[a]*, tandis que la sphère est le bord visuel de l'espace euclidien *[b]*. Le bord visuel est un concept qui permet de clore un espace géométrique.

appliquant à un carré le groupe des translations entières, horizontales et verticales (voir les figures 5a et 5b).

Dans le cas du disque hyperbolique, les groupes paveurs sont plus difficiles à décrire et sont en nombre infini. Un exemple est construit en prenant, pour motif initial, un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets sont de la forme $180^\circ/p$, $180^\circ/q$ et $180^\circ/r$, où p , q et r sont des entiers positifs vérifiant $1/p + 1/q + 1/r < 1$, ce qui garantit que la somme des angles soit inférieure à 180° . Les triangles se répètent alors sur le disque hyperbolique en devenant de plus en plus petits du point de vue euclidien, bien qu'ils gardent la même taille si on les mesure à l'aune de la longueur hyperbolique (voir la figure 5c).

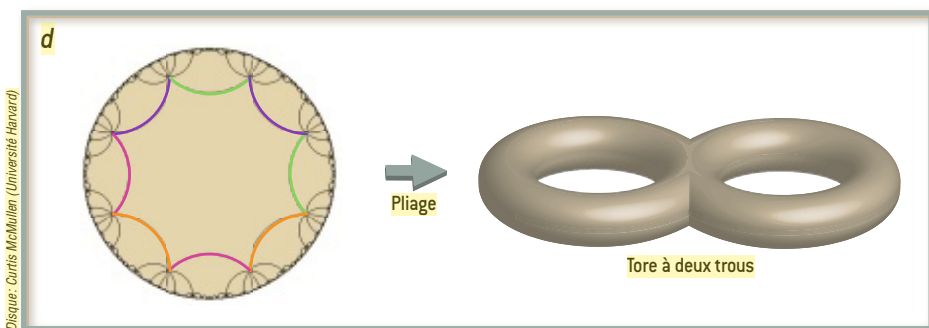
Il y a une quarantaine d'années, les mathématiciens ont introduit la notion d'«ensemble limite» d'un pavage régulier. Il s'agit d'un ensemble de points appartenant au bord visuel de l'espace et qui reflète la façon dont un point O de l'espace s'échappe à l'infini lorsqu'on le

déplace à l'aide des transformations du groupe paveur. Imaginons que les points de cette trajectoire soient peints en rouge, et intéressons-nous à ceux qui s'éloignent de O . Pour un observateur immobile, ces points s'accumulent à l'infini sur une partie rouge de son horizon : c'est l'ensemble limite du pavage.

Quelle est la nature de cet ensemble limite ? Pour un pavage régulier du plan euclidien, cet ensemble est soit formé d'un nombre fini de points, soit égal à tout le bord visuel, c'est-à-dire au cercle. Le premier cas est illustré par le pavage en bandes verticales : la trajectoire de O étant portée par la droite horizontale passant par ce point, ses points limites sont les deux «extrémités» à l'infini de cette droite (voir la figure 6a).

Le pavage régulier par des carrés illustre le deuxième cas. On montre que, obtenue par les translations entières horizontales et verticales, la trajectoire de O croise une infinité de fois toute droite de pente rationnelle passant par O . En poussant plus loin le raisonnement et en utilisant le fait que les nombres rationnels sont très nombreux dans l'ensemble de tous les nombres, on obtient que la «trace à l'infini» de cette trajectoire coïncide avec le bord visuel (voir la figure 6b).

Dans le disque hyperbolique, il existe aussi des pavages réguliers dont l'ensemble limite est constitué d'un nombre fini de points, ou encore égal à tout le cercle à l'infini. Mais, à la différence des pavages euclidiens, un troisième cas s'ajoute : celui d'une multitude de pavages réguliers dont les ensembles limites sont de nature fractale (voir la figure 6c). Ces ensembles, mines d'or de la géométrie hyperbolique, illustrent encore une fois la souplesse de cette géométrie.



à décrire. Ce disque peut être pavé d'une infinité de façons différentes, par des triangles (c, par exemple), par des octogones (d), etc. Avec le pavage par des octogones, le pliage le long de directions définies par les paires de côtés de l'octogone central de même couleur crée un tore à deux trous.

✓ BIBLIOGRAPHIE

É. Ghys, *Géométrer l'espace : de Gauss à Perelman*, *Images des Mathématiques*, CNRS, 2007 (<http://images.math.cnrs.fr/Geometriser-l-espace-de-Gauss-a.html>) et *Dossier Pour la Science* n° 74, janvier-mars 2012.

F. Dal'Bo, *Des trajectoires pour approcher les nombres*, *Pour la Science*, n° 359, pp. 66-73, septembre 2007.

F. Dal'Bo, *Trajectoires géodésiques et horocycliques*, EDP Sciences-CNRS, 2007.

J.-P. Luminet, *L'Univers chiffonné*, Gallimard (Folio), 2005.

R. Taton, *L'œuvre mathématique de Desargues*, 2^e édition, J. Vrin, 1981.

À quoi sert l'ensemble limite ? D'importantes informations portant sur un pavage régulier s'y reflètent. Certaines sont liées à la forme du motif du pavage. Par exemple, si ce motif est borné, comme dans le cas du pavage du plan euclidien par des carrés, son ensemble limite coïncide avec le bord visuel.

Lorsque l'ensemble limite est une fractale, des résultats récents montrent que l'architecture infinitésimale de cet ensemble, mesurée par sa « dimension fractale », est reliée au comptage des images du point O par les transformations du groupe paveur. Plus précisément, la croissance de ce groupe, donnée par le nombre d'images restant à une distance de O inférieure à un nombre positif R , est une fonction exponentielle du produit de cette dimension par R .

Des surfaces créées en pliant des pavages

Les pavages réguliers du plan euclidien, du disque hyperbolique et de la sphère sont intimement reliés aux surfaces (ou variétés de dimension 2). Ce lien s'appuie sur une interprétation en termes de pliage des déplacements associés au pavage.

Prenons l'exemple du pavage du plan euclidien par des carrés. Si l'on utilise les translations horizontales et verticales, non pas pour déplacer le motif mais pour identifier ses côtés, c'est-à-dire les recoller, on obtient une surface dont la forme est celle d'une bouée : un tore (voir la figure 5b). Parce qu'il provient d'un

pliage du plan, on dit que le tore est une « surface euclidienne ».

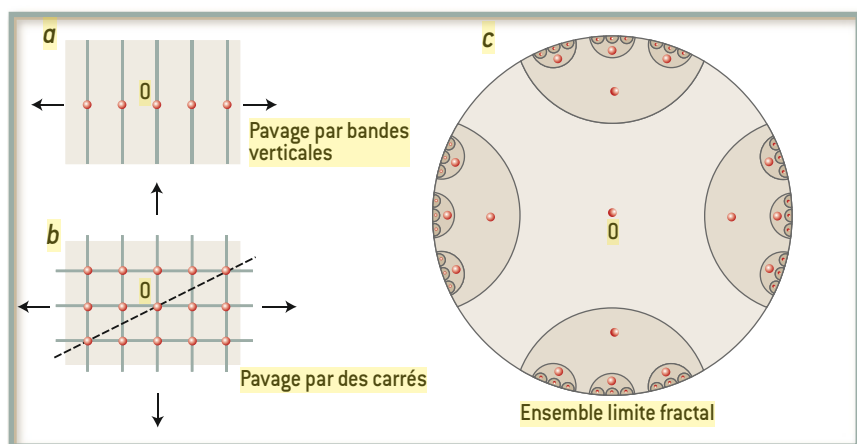
Les surfaces ne sont pas toutes euclidiennes. Un contre-exemple est la sphère : elle ne peut pas être construite en pliant un plan. On peut citer aussi le tore à deux trous, obtenu en recollant deux tores, que l'on construit en pliant le disque hyperbolique le long d'un octogone (hyperbolique) régulier (voir la figure 5d). Ces trois exemples reflètent une situation générale mise en lumière par Poincaré : une surface est soit euclidienne, soit sphérique, soit hyperbolique. Les deux premières familles sont finies, la troisième est infinie.

Pour savoir quel type de géométrie porte une surface, il suffit d'en connaître la forme. Cette information topologique ne suffit cependant pas pour retrouver le pavage à partir duquel la surface a été construite. Le tore à deux trous en est la preuve : il existe une infinité de pavages réguliers du disque hyperbolique permettant de le construire ! Toutefois, cette différence entre topologie et géométrie disparaît lorsqu'on s'intéresse à des objets de dimension supérieure à celle des surfaces, notamment les variétés de dimension 3.

Parmi ces variétés, on peut citer la boule, le tore plein, et plus généralement les surfaces fermées pleines. À l'exception de ces cas particuliers, il est généralement impossible de visualiser de tels objets dans l'espace ordinaire. Ces objets abstraits de dimension 3 n'en ont pas moins une existence mathématique.

L'un des premiers mathématiciens à s'y être intéressés de près est l'Américain William Thurston, dans les années 1970. Ses contributions dans le domaine lui ont valu une médaille Fields en 1978. Une question, inspirée par l'étude des surfaces, est au cœur de ses travaux : une variété est-elle « géométrisable » ? Autrement dit, peut-on la construire à partir du pavage régulier d'un espace modèle de dimension 3 ?

Cette question profonde a été à l'origine de nombreux développements en topologie. Elle est en particulier reliée à la conjecture de Poincaré, selon laquelle toute variété compacte de dimension 3 dépourvue de trous est topologiquement équivalente à la sphère tridimensionnelle (bord de la boule euclidienne de dimension 4). En 2003, le Russe Grigori Perelman parvint à démontrer cette conjecture, ce qui lui valut en 2006 une médaille



6. L'ENSEMBLE LIMITE D'UN PAVAGE RÉGULIER est l'ensemble de points vers lequel tendent les images d'un point initial O par les transformations du groupe paveur. Pour un pavage du plan par bandes verticales (a), l'ensemble limite est constitué des deux points à l'infini, à droite et à gauche. Pour un pavage par des carrés (b), on montre que la « trace » à l'infini de la trajectoire de O coïncide avec le bord visuel du plan, c'est-à-dire le cercle. Dans le cas du disque hyperbolique, on peut avoir des pavages réguliers dont l'ensemble limite est fractal (c).