

✓ BIBLIOGRAPHIE

É. Ghys, *Géométrer l'espace : de Gauss à Perelman*, Images des Mathématiques, CNRS, 2007 (<http://images.math.cnrs.fr/Geometriser-l-espace-de-Gauss-a.html>) et *Dossier Pour la Science* n° 74, janvier-mars 2012.

F. Dal'Bo, *Des trajectoires pour approcher les nombres*, *Pour la Science*, n° 359, pp. 66-73, septembre 2007.

F. Dal'Bo, *Trajectoires géodésiques et horocycliques*, EDP Sciences-CNRS, 2007.

J.-P. Luminet, *L'Univers chiffonné*, Gallimard (Folio), 2005.

R. Taton, *L'œuvre mathématique de Desargues*, 2^e édition, J. Vrin, 1981.

À quoi sert l'ensemble limite ? D'importantes informations portant sur un pavage régulier s'y reflètent. Certaines sont liées à la forme du motif du pavage. Par exemple, si ce motif est borné, comme dans le cas du pavage du plan euclidien par des carrés, son ensemble limite coïncide avec le bord visuel.

Lorsque l'ensemble limite est une fractale, des résultats récents montrent que l'architecture infinitésimale de cet ensemble, mesurée par sa « dimension fractale », est reliée au comptage des images du point O par les transformations du groupe paveur. Plus précisément, la croissance de ce groupe, donnée par le nombre d'images restant à une distance de O inférieure à un nombre positif R , est une fonction exponentielle du produit de cette dimension par R .

Des surfaces créées en pliant des pavages

Les pavages réguliers du plan euclidien, du disque hyperbolique et de la sphère sont intimement reliés aux surfaces (ou variétés de dimension 2). Ce lien s'appuie sur une interprétation en termes de pliage des déplacements associés au pavage.

Prenons l'exemple du pavage du plan euclidien par des carrés. Si l'on utilise les translations horizontales et verticales, non pas pour déplacer le motif mais pour identifier ses côtés, c'est-à-dire les recoller, on obtient une surface dont la forme est celle d'une bouée : un tore (voir la figure 5b). Parce qu'il provient d'un

pliage du plan, on dit que le tore est une « surface euclidienne ».

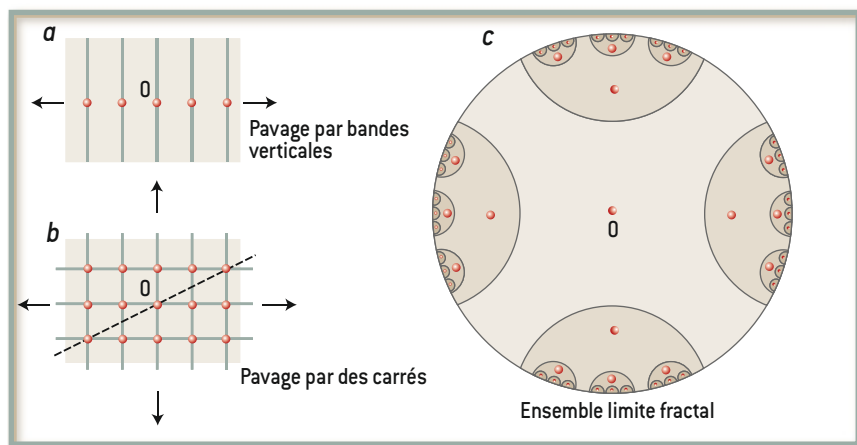
Les surfaces ne sont pas toutes euclidiennes. Un contre-exemple est la sphère : elle ne peut pas être construite en pliant un plan. On peut citer aussi le tore à deux trous, obtenu en recollant deux tores, que l'on construit en pliant le disque hyperbolique le long d'un octogone (hyperbolique) régulier (voir la figure 5d). Ces trois exemples reflètent une situation générale mise en lumière par Poincaré : une surface est soit euclidienne, soit sphérique, soit hyperbolique. Les deux premières familles sont finies, la troisième est infinie.

Pour savoir quel type de géométrie porte une surface, il suffit d'en connaître la forme. Cette information topologique ne suffit cependant pas pour retrouver le pavage à partir duquel la surface a été construite. Le tore à deux trous en est la preuve : il existe une infinité de pavages réguliers du disque hyperbolique permettant de le construire ! Toutefois, cette différence entre topologie et géométrie disparaît lorsqu'on s'intéresse à des objets de dimension supérieure à celle des surfaces, notamment les variétés de dimension 3.

Parmi ces variétés, on peut citer la boule, le tore plein, et plus généralement les surfaces fermées pleines. À l'exception de ces cas particuliers, il est généralement impossible de visualiser de tels objets dans l'espace ordinaire. Ces objets abstraits de dimension 3 n'en ont pas moins une existence mathématique.

L'un des premiers mathématiciens à s'y être intéressés de près est l'Américain William Thurston, dans les années 1970. Ses contributions dans le domaine lui ont valu une médaille Fields en 1978. Une question, inspirée par l'étude des surfaces, est au cœur de ses travaux : une variété est-elle « géométrisable » ? Autrement dit, peut-on la construire à partir du pavage régulier d'un espace modèle de dimension 3 ?

Cette question profonde a été à l'origine de nombreux développements en topologie. Elle est en particulier reliée à la conjecture de Poincaré, selon laquelle toute variété compacte de dimension 3 dépourvue de trous est topologiquement équivalente à la sphère tridimensionnelle (bord de la boule euclidienne de dimension 4). En 2003, le Russe Grigori Perelman parvint à démontrer cette conjecture, ce qui lui valut en 2006 une médaille



6. L'ENSEMBLE LIMITE D'UN PAVAGE RÉGULIER est l'ensemble de points vers lequel tendent les images d'un point initial O par les transformations du groupe paveur. Pour un pavage du plan par bandes verticales (a), l'ensemble limite est constitué des deux points à l'infini, à droite et à gauche. Pour un pavage par des carrés (b), on montre que la « trace » à l'infini de la trajectoire de O coïncide avec le bord visuel du plan, c'est-à-dire le cercle. Dans le cas du disque hyperbolique, on peut avoir des pavages réguliers dont l'ensemble limite est fractal (c).

Fields (qu'il a déclinée, tout comme le prix Clay plus récemment).

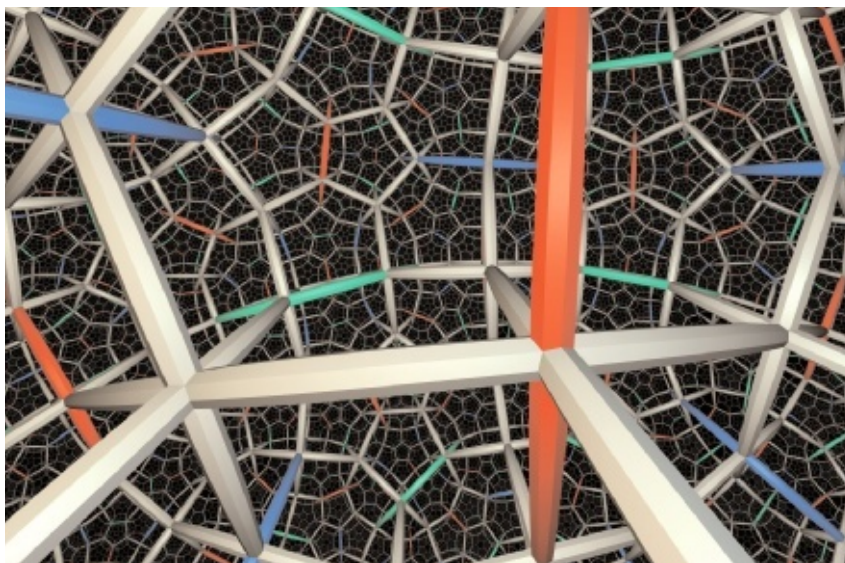
Si la géométrisation des surfaces met en jeu trois modèles – le plan euclidien, la sphère ou le disque hyperbolique –, celle des variétés de dimension 3 en fait intervenir huit. Parmi eux, citons « notre » espace ambiant euclidien et la boule hyperbolique obtenue, par analogie au disque hyperbolique, à partir d'une boule euclidienne (pleine, privée de la sphère qui l'entoure), sur laquelle on modifie le calcul des longueurs des chemins.

Les pavages réguliers de cette boule (voir la figure 7), difficiles à réaliser, permettent de construire par pliage des variétés dites hyperboliques. Ces objets, qui échappent à notre intuition, intéressent beaucoup les topologues pour leur forme complexe et leur lien avec la théorie mathématique des nœuds. En cosmologie, ils sont sources de spéculations sur la topologie de l'Univers.

Contrairement au cas des surfaces bidimensionnelles, la topologie d'une variété hyperbolique de dimension 3 détermine sa géométrie. C'est précisément l'énoncé du « théorème de rigidité » de G. Mostow : une variété hyperbolique étant donnée, il existe un unique pavage régulier de la boule hyperbolique qui permet de construire (par pliage) la variété en question.

Ce résultat de « dépliage » joue un rôle clef dans les travaux de W. Thurston et de G. Perelman. Il est à l'origine d'une école mathématique très active qui, de Yale à Jérusalem, travaille autour de ces concepts en lien avec la théorie des nombres et celle des probabilités.

Pour démontrer ce théorème, G. Mostow a fait preuve d'une grande originalité en introduisant le bord visuel de la boule hyperbolique dans son raisonnement. Dans ses grandes lignes, la démonstration consiste à partir d'un pavage régulier de la boule par un motif borné. En l'étudiant de près, on découvre que son groupe paveur contient, contrairement aux groupes paveurs euclidiens, des transformations mettant en jeu des mouvements complexes. G. Mostow les applique aux points du bord visuel de la boule hyperbolique, c'est-à-dire d'une sphère. En utilisant la présence de ces mouvements complexes sur un espace cette fois limité et de dimension 2, il parvient à montrer qu'à elle seule, cette action à l'infini détermine le pavage de départ.



Charles Gunt, Mathieu, Berlin (Allemagne)

7. L'INTÉRIEUR D'UNE BOULE HYPERBOLIQUE pavée de façon régulière par des dodécaèdres. Les couleurs n'ont pas de signification particulière dans cette représentation artistique du pavage.

Si, aujourd'hui, le théorème de rigidité de G. Mostow a perdu son éclat aux côtés d'énoncés plus généraux, l'idée de raisonner sur le bord visuel continue à vivre chez les géomètres du XXI^e siècle. Par ailleurs, sur les traces de G. Mostow et du Russe Gregori Margulis, les bords à l'infini se sont introduits dans des démonstrations d'arithmétique, grâce à la découverte de liens entre nombres et trajectoires sur des variétés illimitées. Des mathématiciens misent sur cette approche pour tenter de résoudre des conjectures de théorie des nombres.

Des bords à l'infini pour la théorie des nombres

L'une de ces conjectures, énoncée dans les années 1930 par l'Anglais John Littlewood, affirme qu'étant donnés deux nombres réels a et b , il existe des entiers p, q, r tels que la quantité $q^3(a - p/q)(b - r/q)$ soit aussi proche de zéro que l'on veut (cet énoncé porte donc sur l'approximation de a et b par des nombres rationnels). Sa formulation géométrique met en jeu un pavage régulier d'un espace de dimension 8 et un point du bord à l'infini de cet espace qui représente le couple de nombres (a, b) .

Dans ce modèle, s'intéresser à la conjecture de Littlewood revient à analyser les motifs du pavage rencontrés par une famille de géodésiques d'extrémité (a, b) . C'est ainsi

qu'avec deux collègues, le jeune Israélien Elon Lindenstrauss, lauréat d'une médaille Fields en 2010, a montré que l'ensemble des éventuelles exceptions à la conjecture de Littlewood est, sinon vide, très petit (en un sens mathématique précis). Ces travaux sont une belle illustration de la force de l'approche des bords à l'infini.

Le plan euclidien, le disque hyperbolique et leurs analogues en dimension supérieure font partie des espaces où les rayons lumineux se propagent facilement. Ce n'est pas toujours le cas. Certaines surfaces, par exemple, contiennent des trous ou des bosses qui dévient les rayons. On peut en construire une multitude par pliage de pavages réguliers du disque hyperbolique dont le motif initial est un polygone hyperbolique admettant une infinité de côtés, ou encore par recollement d'une infinité de tores.

Pour capturer l'infini d'une telle surface, l'objet adapté n'est plus le bord visuel, mais un ensemble plus abstrait, l'horobord, introduit dans les années 1980 par le mathématicien franco-russe Mikhaïl Gromov. Et depuis, d'autres notions de bord ont été inventées.

Ainsi, plus de 2000 ans après Euclide, les géomètres, partant des lois de l'optique, ont libéré les mathématiques en neutralisant l'infini, alors même que les physiciens, inspirés par des espaces géométriques abstraits, l'ont introduit dans leur représentation de l'Univers. Deux démarches qui, loin de se contredire, s'enrichissent. ■