

Fields (qu'il a déclinée, tout comme le prix Clay plus récemment).

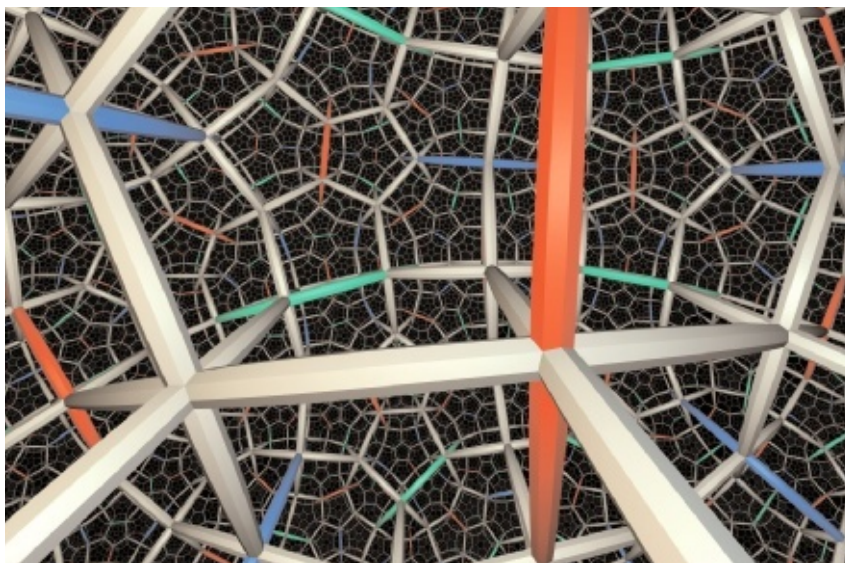
Si la géométrisation des surfaces met en jeu trois modèles – le plan euclidien, la sphère ou le disque hyperbolique –, celle des variétés de dimension 3 en fait intervenir huit. Parmi eux, citons « notre » espace ambiant euclidien et la boule hyperbolique obtenue, par analogie au disque hyperbolique, à partir d'une boule euclidienne (pleine, privée de la sphère qui l'entoure), sur laquelle on modifie le calcul des longueurs des chemins.

Les pavages réguliers de cette boule (voir la figure 7), difficiles à réaliser, permettent de construire par pliage des variétés dites hyperboliques. Ces objets, qui échappent à notre intuition, intéressent beaucoup les topologues pour leur forme complexe et leur lien avec la théorie mathématique des nœuds. En cosmologie, ils sont sources de spéculations sur la topologie de l'Univers.

Contrairement au cas des surfaces bidimensionnelles, la topologie d'une variété hyperbolique de dimension 3 détermine sa géométrie. C'est précisément l'énoncé du « théorème de rigidité » de G. Mostow : une variété hyperbolique étant donnée, il existe un unique pavage régulier de la boule hyperbolique qui permet de construire (par pliage) la variété en question.

Ce résultat de « dépliage » joue un rôle clef dans les travaux de W. Thurston et de G. Perelman. Il est à l'origine d'une école mathématique très active qui, de Yale à Jérusalem, travaille autour de ces concepts en lien avec la théorie des nombres et celle des probabilités.

Pour démontrer ce théorème, G. Mostow a fait preuve d'une grande originalité en introduisant le bord visuel de la boule hyperbolique dans son raisonnement. Dans ses grandes lignes, la démonstration consiste à partir d'un pavage régulier de la boule par un motif borné. En l'étudiant de près, on découvre que son groupe paveur contient, contrairement aux groupes pavés euclidiens, des transformations mettant en jeu des mouvements complexes. G. Mostow les applique aux points du bord visuel de la boule hyperbolique, c'est-à-dire d'une sphère. En utilisant la présence de ces mouvements complexes sur un espace cette fois limité et de dimension 2, il parvient à montrer qu'à elle seule, cette action à l'infini détermine le pavage de départ.



Charles Gamm, Mathéon, Berlin (Allemagne)

7. L'INTÉRIEUR D'UNE BOULE HYPERBOLIQUE pavée de façon régulière par des dodécaèdres. Les couleurs n'ont pas de signification particulière dans cette représentation artistique du pavage.

Si, aujourd'hui, le théorème de rigidité de G. Mostow a perdu son éclat aux côtés d'énoncés plus généraux, l'idée de raisonner sur le bord visuel continue à vivre chez les géomètres du XXI^e siècle. Par ailleurs, sur les traces de G. Mostow et du Russe Gregori Margulis, les bords à l'infini se sont introduits dans des démonstrations d'arithmétique, grâce à la découverte de liens entre nombres et trajectoires sur des variétés illimitées. Des mathématiciens misent sur cette approche pour tenter de résoudre des conjectures de théorie des nombres.

Des bords à l'infini pour la théorie des nombres

L'une de ces conjectures, énoncée dans les années 1930 par l'Anglais John Littlewood, affirme qu'étant donnés deux nombres réels a et b , il existe des entiers p, q, r tels que la quantité $q^3(a - p/q)(b - r/q)$ soit aussi proche de zéro que l'on veut (cet énoncé porte donc sur l'approximation de a et b par des nombres rationnels). Sa formulation géométrique met en jeu un pavage régulier d'un espace de dimension 8 et un point du bord à l'infini de cet espace qui représente le couple de nombres (a, b) .

Dans ce modèle, s'intéresser à la conjecture de Littlewood revient à analyser les motifs du pavage rencontrés par une famille de géodésiques d'extrémité (a, b) . C'est ainsi

qu'avec deux collègues, le jeune Israélien Elon Lindenstrauss, lauréat d'une médaille Fields en 2010, a montré que l'ensemble des éventuelles exceptions à la conjecture de Littlewood est, sinon vide, très petit (en un sens mathématique précis). Ces travaux sont une belle illustration de la force de l'approche des bords à l'infini.

Le plan euclidien, le disque hyperbolique et leurs analogues en dimension supérieure font partie des espaces où les rayons lumineux se propagent facilement. Ce n'est pas toujours le cas. Certaines surfaces, par exemple, contiennent des trous ou des bosses qui dévient les rayons. On peut en construire une multitude par pliage de pavages réguliers du disque hyperbolique dont le motif initial est un polygone hyperbolique admettant une infinité de côtés, ou encore par recollement d'une infinité de tores.

Pour capturer l'infini d'une telle surface, l'objet adapté n'est plus le bord visuel, mais un ensemble plus abstrait, l'horobord, introduit dans les années 1980 par le mathématicien franco-russe Mikhaïl Gromov. Et depuis, d'autres notions de bord ont été inventées.

Ainsi, plus de 2000 ans après Euclide, les géomètres, partant des lois de l'optique, ont libéré les mathématiques en neutralisant l'infini, alors même que les physiciens, inspirés par des espaces géométriques abstraits, l'ont introduit dans leur représentation de l'Univers. Deux démarches qui, loin de se contredire, s'enrichissent. ■

Nourrir et préserver

Jonathan Foley

Doubler la production alimentaire d'ici 2050 tout en réduisant la dégradation de l'environnement : selon une équipe internationale, cet objectif est accessible.

L'ESSENTIEL

- ✓ Pour nourrir neuf milliards d'individus en 2050, il faudra doubler la production alimentaire.
- ✓ Or, déjà aujourd'hui, presque toutes les terres cultivables sont exploitées.
- ✓ Une équipe internationale propose un plan d'action pour doubler la production tout en réduisant son impact sur l'environnement.
- ✓ Ce plan comporte cinq mesures : améliorer la gestion des terres agricoles pour stopper leur extension, augmenter les rendements les plus faibles, mieux utiliser les engrais et l'eau, consommer moins de viande et éviter le gaspillage.

Un milliard de personnes souffrent aujourd'hui de faim chronique. Le problème ne vient pas tant de la quantité de nourriture disponible – les agriculteurs en produisent suffisamment pour répondre à leurs besoins – que de sa répartition inégale et de l'escalade des prix. En 2050, cependant, le défi aura pris une tout autre tournure.

La population mondiale aura augmenté de deux ou trois milliards, ce qui, d'après plusieurs études, devrait doubler la demande agricole. À cause de la croissance démographique, certes, mais aussi de l'augmentation du niveau de vie pour bon nombre de personnes, qui devrait entraîner une hausse de la consommation, en particulier de viande, sans oublier l'utilisation croissante de terres arables pour produire des biocarburants. Ainsi, même si l'on résout aujourd'hui les problèmes de pauvreté et d'accès aux ressources, il faudra produire deux fois plus pour assurer un approvisionnement mondial suffisant.

Et ce n'est pas tout. Parce qu'elle nécessite de défricher les forêts tropicales, de cultiver des terres en marge de zones non cultivables et d'intensifier l'industrie agro-alimentaire dans des paysages et des bassins hydrographiques fragiles, l'agriculture est devenue la principale menace environnementale pour la planète. Elle occupe une grande part des terres disponibles, perturbe

des écosystèmes, consomme d'importantes ressources en eau douce, pollue les rivières et les océans et émet plus de gaz à effet de serre que la plupart des autres activités humaines. Pour préserver la planète à long terme, il devient impératif de réduire les impacts nocifs de l'agriculture.

Doubler la production en 40 ans

Le système alimentaire mondial est ainsi confronté à trois défis intriqués : nourrir les sept milliards d'individus qui peuplent la planète aujourd'hui, doubler la production d'aliments au cours des 40 prochaines années et atteindre ces deux objectifs tout en devenant une activité durable pour l'environnement. Comment répondre simultanément à ces trois défis ? Une équipe internationale d'experts, que j'ai coordonnée, propose un programme en cinq mesures qui, si elles sont appliquées conjointement, pourrait doubler la nourriture disponible pour la consommation humaine mondiale tout en réduisant les émissions de gaz à effet de serre, les pertes de biodiversité, l'utilisation de l'eau et sa pollution.

À première vue, la solution pour nourrir plus de personnes semble évidente : faire pousser plus de produits alimentaires en étendant les terres cultivées et en

LA PLANÈTE

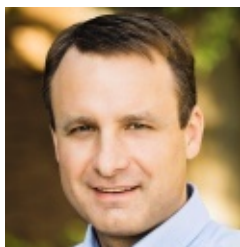


augmentant les rendements, c'est-à-dire les quantités récoltées par hectare. Plusieurs obstacles de taille, cependant, s'y opposent.

Actuellement, 38 pour cent de la surface des continents émergés – hors Groenland et Antarctique – sont cultivés, et la plupart des terres cultivées sont les meilleures terres arables. Les terres non cultivées sont des déserts, des montagnes, de la toundra, des glaciers, des villes et des parcs, et d'autres surfaces impropres à la culture. Les quelques terres cultivables qui subsistent en frontière de ces domaines sont surtout situées dans les forêts tropicales et les savanes, qui sont vitales pour la stabilité du globe, en particulier en tant que réserves de carbone et de biodiversité. L'extension de l'agriculture sur ces zones n'est donc pas envisageable. Pourtant, au cours des 20 dernières années, cinq à dix millions d'hectares de terres cultivées ont été créés par an, dont une part importante sous les tropiques. Ces extensions n'ont toutefois agrandi la surface nette de terres cultivées que de trois pour cent, car simultanément, des villes ont recouvert des terres agricoles, en particulier dans les zones tempérées.

Kevin Van Aelst

L'AUTEUR



Jonathan FOLEY est directeur de l'Institut sur l'environnement de l'Université du Minnesota, où il est aussi titulaire de la chaire présidentielle McKnight de développement durable.

L'amélioration du rendement semble aussi une option intéressante. Cependant, notre équipe de recherche a observé que le rendement agricole global moyen n'a augmenté que d'environ 20 pour cent ces 20 dernières années, soit bien moins que ce qui est annoncé en général. Cette amélioration est importante, mais insuffisante pour doubler la production alimentaire d'ici 40 ans. Si les rendements de certaines cultures ont augmenté de façon significative, d'autres ont stagné, voire diminué.

Nourrir plus de personnes serait plus aisé si tous les produits alimentaires cultivés étaient directement destinés aux humains, mais seulement 60 pour cent des récoltes mondiales le sont : principalement des céréales, suivies des légumineuses (haricots, lentilles), de plantes oléagineu-

L'eau douce est l'une des autres « victimes ». Les hommes utilisent 4 000 kilomètres cubes d'eau par an, captée essentiellement dans des rivières et des nappes aquifères. L'irrigation représente 70 pour cent de ces prélèvements, soit 80 à 90 pour cent de l'eau consommée (l'eau qui est utilisée et qui ne retourne pas dans les bassins hydrographiques). En conséquence, le débit de nombreux grands fleuves, tel le Colorado, a diminué, certains cours d'eau se sont taris et les niveaux baissent rapidement dans de nombreuses régions, notamment aux États-Unis et en Inde.

Non seulement l'eau disparaît, mais elle est aussi contaminée. Engrais, herbicides et pesticides polluent presque tous les écosystèmes. Les flux d'azote et de phosphore dans l'environnement ont plus que doublé depuis 1960, polluant l'eau et créant d'énormes « zones mortes », privées d'oxygène, à l'embouchure de nombreux fleuves majeurs. Ironie du sort, les engrais lessivés par la pluie compromettent, au nom de l'augmentation de la production alimentaire, une autre source importante d'alimentation : la pêche côtière. Les engrais ont été un ingrédient clé de la révolution verte qui a aidé à nourrir le monde, mais on ne peut laisser la moitié des engrais appliqués être ainsi perdus.

L'agriculture est également la plus grande source humaine d'émission de gaz à effet de serre : elle représente environ 35 pour cent du dioxyde de carbone, du méthane et du protoxyde d'azote émis par les activités humaines, soit plus que les émissions liées au transport (voitures, camions et avions) ou à la production d'électricité. Une partie de ces émissions agricoles sont liées à l'énergie produite et utilisée pour cultiver, transformer et transporter les aliments, mais la plupart sont dues à la déforestation tropicale, à la production de méthane par les animaux et les rizières, et au protoxyde d'azote émis par les sols surfertilisés.

Stopper l'extension des terres agricoles

Les précédentes approches pour résoudre les problèmes alimentaires et environnementaux étaient souvent incompatibles. Produire plus en défrichant plus de terres et en utilisant plus d'eau et de produits chimiques, ou restaurer les écosystèmes en reprenant des terres arables à l'agriculture, il fallait choisir. Une autre voie qui

ses, de légumes et de fruits. Le reste est utilisé pour nourrir les animaux (35 pour cent) et cultiver des biocarburants et autres produits industriels, notamment textiles (5 pour cent).

La production de viande joue un rôle majeur dans cette répartition. Nourrir des animaux avec des produits issus de l'agriculture, même dans les systèmes de production de viande et de produits laitiers les plus efficaces, réduit considérablement la quantité de nourriture disponible pour les humains. En général, dans un tel système de production bovine, 30 kilogrammes de céréales produisent 1 kilogramme de viande de bœuf comestible, sans os.

Un autre élément empêche d'augmenter la production de nourriture : la détérioration, déjà bien avancée, de l'environnement. Seule notre consommation d'énergie, avec ses conséquences sur le climat et l'acidification des océans, rivalise avec l'ampleur croissante des impacts de l'agriculture sur l'environnement. Notre équipe de recherche estime que l'agriculture a déjà fait disparaître ou a radicalement transformé 70 pour cent des prairies du monde, 50 pour cent des savanes, 45 pour cent des forêts tempérées à feuilles caduques et 25 pour cent des forêts tropicales. L'empreinte de l'agriculture est près de 60 fois plus étendue que celle des routes et des constructions.

ON NE PEUT LAISSER LA MOITIÉ DES ENGRAIS appliqués être ainsi perdus.

Quelques chiffres

- ✓ Alors que les rendements agricoles avaient augmenté de 65 pour cent entre 1965 et 1985, ils n'ont augmenté que de 20 pour cent entre 1985 et 2005.
- ✓ En Europe et en Amérique du Nord, seuls 40 pour cent des récoltes sont destinés à la consommation humaine, contre 80 pour cent en Afrique et en Asie.
- ✓ 75 pour cent des terres agricoles, soit 3,7 milliards d'hectares, sont utilisées pour l'élevage : 350 millions d'hectares de cultures céréalières pour nourrir les animaux, et 3,38 milliards d'hectares de pâturages et de prés.
- ✓ Au cours des 50 dernières années, l'utilisation des engrais a quintuplé.
- ✓ Chaque année, cinq à dix millions d'hectares de forêt tropicale disparaissent au profit de l'agriculture.