

LOGIQUE & CALCUL

La conjecture du carré inscrit

Placer sur une courbe fermée quatre points formant les coins d'un carré est presque toujours possible. C'est bien, mais comment se débarrasser du « presque » ?

Jean-Paul DELAHAYE

Là où on s'y attend le moins, des questions mathématiques difficiles surgissent, si difficiles parfois qu'elles restent non résolues. Le cas dont nous allons parler est particulièrement étrange puisque la question est « presque » résolue depuis longtemps. Malheureusement, les mathématiciens n'ont pu enlever le « presque », malgré des progrès récents et un siècle de tentatives diverses par des chercheurs chevronnés.

Voici le problème.

1) Dessinez une boucle avec une craie sur un tableau : cercle, ellipse, ovoïde, polygone régulier, etc.

2) Trouvez quatre points de la courbe qui soient les quatre sommets d'un carré.

Si vous êtes patient et méthodique, vous réussirez quel que soit votre tracé sur le tableau (voir la figure 1).

Le constat sur des cas particuliers est intéressant, mais peut-on démontrer qu'il existe un tel carré pour toute courbe fermée simple (qui revient à son point de départ sans se couper) dessinée sur un plan ?

La réponse n'est pas connue dans le cas général, bien que de nombreux cas particuliers aient été traités, lesquels recouvrent à peu près toutes les courbes fermées simples habituellement envisagées en mathématiques. Le problème a été formulé en 1911 par le mathématicien allemand Otto Toeplitz [1881-1940]. Depuis, une multitude d'articles mathématiques lui ont été consacrés. J'en ai compté plus de 30, qui,

tout en faisant avancer la résolution de l'énigme ou en traitant certaines variantes, n'en sont pas venus à bout. L'affirmation que « Toute courbe fermée simple contient les quatre coins d'au moins un carré » reste, aujourd'hui encore, une conjecture.

L'énigme est liée au problème concernant le positionnement d'une table sur un monticule. Considérons un terrain bombé, une petite colline, assez régulier pour qu'on puisse l'assimiler à une surface continue. Chaque ligne de niveau est une courbe fermée simple ou la juxtaposition de plusieurs courbes fermées simples. Si la conjecture est vraie ou si les courbes mises en jeu sont suffisamment régulières pour entrer dans la classe des courbes pour laquelle la conjecture est prouvée (voir plus loin), alors sur chacune d'elles, il existe quatre points formant les sommets d'un carré, où l'on peut placer les pieds d'une table carrée ayant des pieds de même hauteur et supposés très fins et assez longs.

Pique-nique sur une colline

À chaque niveau possible, on pourra ainsi poser une table carrée au moins dans une position stable et parfaitement horizontale. Notons toutefois que, pour un niveau donné, la table sera imposée et il faudra donc la fabriquer exprès pour que l'écartement entre les pieds soit le bon, c'est-à-dire égal au côté du carré inscrit sur la courbe de niveau choisie. Heureusement, si la surface du

monticule est assez régulière, le côté du carré inscrit variera de manière continue en parcourant les lignes de niveau, et on aura donc le résultat plus intéressant en pratique : toute table à base carrée donnée et assez haute, dont les pieds ne sont pas trop écartés, pourra être placée horizontalement et d'une façon stable sur le monticule où l'on souhaite pique-niquer.

Revenons au problème initial d'un carré ayant ses quatre coins sur une courbe. Précisons que nous dirons « inscrit sur la courbe » même si d'autres intersections du carré avec la courbe se produisent et que celui-ci sort donc de la zone intérieure délimitée par la courbe. Pour expliquer la situation et la multitude de résultats démontrés autour de la conjecture de Toeplitz, il faut faire un effort de rigueur et nous formulerons quelques définitions.

Une courbe fermée simple C du plan est l'ensemble des points $C(t)$ du plan quand t varie dans l'intervalle des nombres réels compris entre 0 et 1 tel que $C(t)$ soit une fonction continue qui ne prend pas deux fois la même valeur (la courbe ne se coupe pas) sauf en $t = 0$ et en $t = 1$ (la courbe revient à son point de départ).

La propriété d'être continue fait que la courbe C se dessine sans avoir à lever la craie. Cette condition de continuité ne garantit pas que la courbe C soit totalement lisse. Elle peut avoir des angles et, par exemple, un triangle équilatéral ou un polygone quelconque (non croisé) est une courbe fermée simple. Les points où la courbe fermée

simple n'admet pas de tangente (il y en a trois pour le triangle) peuvent être tous les points de la courbe : tel est le cas des courbes fractales comme le flocon de von Koch qui ne possède de tangente en aucun point. Cette courbe dont la longueur est infinie est une courbe fermée simple (voir la figure 3). Bien sûr, il peut y avoir plusieurs carrés inscrits et, pour chaque entier positif n , on connaît des exemples de courbes possédant exactement n carrés inscrits (nous y reviendrons).

Des cas particuliers démontrés

La conjecture n'a pas été prouvée dans le cas général, mais un grand nombre de cas particuliers ont été traités.

- La conjecture est démontrée si la courbe possède une tangente en tout point et si cette dernière varie continûment quand le point glisse sur la courbe, c'est-à-dire si la courbe est parfaitement lisse comme un cercle ou une ellipse.

- La conjecture est démontrée si la courbe délimite une zone intérieure convexe, c'est-à-dire telle que si A et B sont deux points de la zone intérieure, alors le segment AB est entièrement contenu dans la zone intérieure.

- La conjecture est démontrée si la courbe est dotée d'un centre de symétrie ou d'un axe de symétrie.

L'un des résultats les plus puissants concernant la conjecture a été démontré en 1989 par Walter Stromquist, du *Swarthmore College* aux États-Unis. Il indique que la conjecture est vraie pour toute courbe « localement monotone ». La propriété d'être localement monotone signifie en gros que la courbe ne fait pas de zigzag à toute échelle (voir la figure 2) : elle peut en faire un peu, mais les zigzags ne doivent pas s'accumuler en un point. Ce résultat permet de traiter le cas de tous les polygones et de toutes les courbes fermées obtenues en collant un nombre fini de bouts de droites, d'arcs de cercles, d'ellipses, de sinusoides, etc. Toutes les courbes que vous tracerez à la craie entrent dans le champ du théorème de Stromquist !

1. Carré inscrit et table sur un monticule

La conjecture de Toeplitz est l'affirmation, toujours sans démonstration en 2012, que toute courbe fermée simple (une boucle ne se coupant pas) contient quatre points formant les sommets d'un carré (a), que l'on dénomme « carré inscrit ».

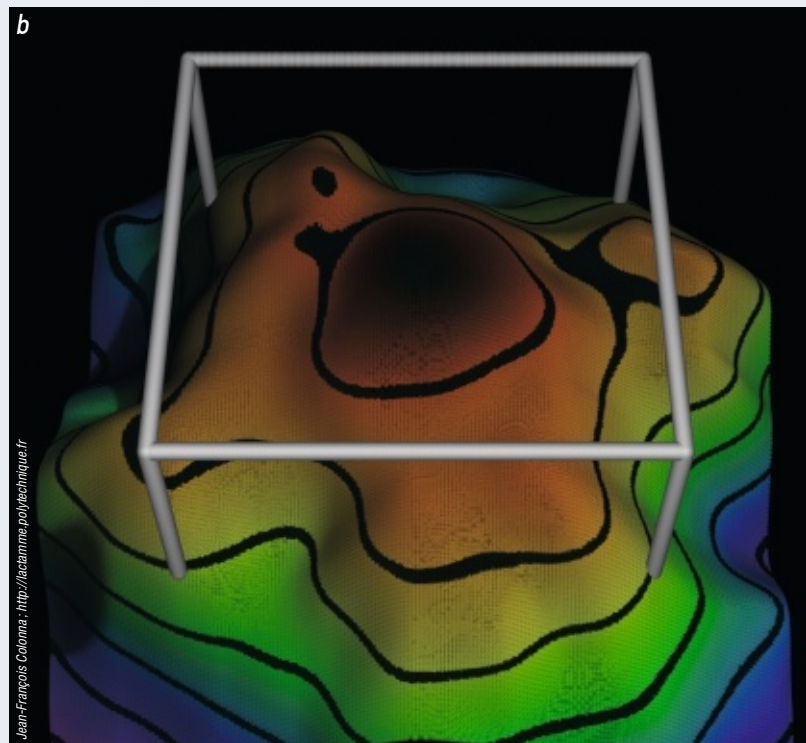
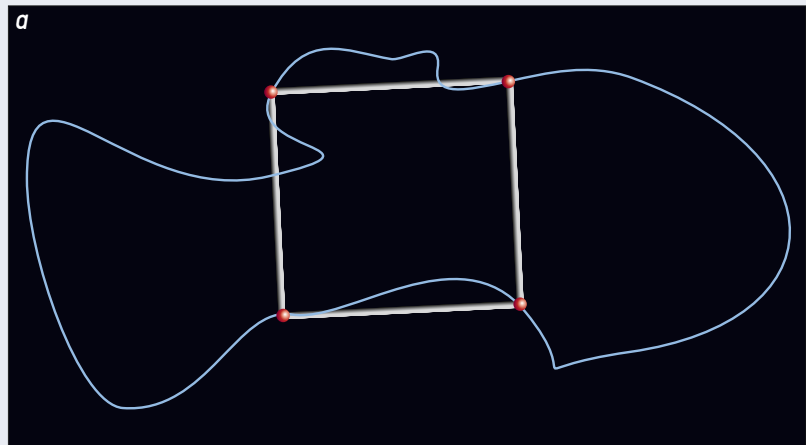
Le problème de la table carrée sur un monticule (b) est

un problème du même type à trois dimensions : peut-on placer horizontalement une table pour qu'elle soit stable, c'est-à-dire telle que les quatre pieds (chacun de même longueur et infiniment fins, formant un carré) touchent la surface ?

Le théorème de la table de Roger Fenn indique les

conditions sur la surface du monticule qui assurent que toute table à base carrée pas trop grande pourra être convenablement posée.

Ce théorème totalement démontré contourne la conjecture de Toeplitz toujours incertaine. Nous voilà rassurés pour notre prochain pique-nique.



Jean-François Colonna - <http://laclanma.polytechnique.fr>