

simple n'admet pas de tangente (il y en a trois pour le triangle) peuvent être tous les points de la courbe : tel est le cas des courbes fractales comme le flocon de von Koch qui ne possède de tangente en aucun point. Cette courbe dont la longueur est infinie est une courbe fermée simple (voir la figure 3). Bien sûr, il peut y avoir plusieurs carrés inscrits et, pour chaque entier positif n , on connaît des exemples de courbes possédant exactement n carrés inscrits (nous y reviendrons).

Des cas particuliers démontrés

La conjecture n'a pas été prouvée dans le cas général, mais un grand nombre de cas particuliers ont été traités.

- La conjecture est démontrée si la courbe possède une tangente en tout point et si cette dernière varie continûment quand le point glisse sur la courbe, c'est-à-dire si la courbe est parfaitement lisse comme un cercle ou une ellipse.

- La conjecture est démontrée si la courbe délimite une zone intérieure convexe, c'est-à-dire telle que si A et B sont deux points de la zone intérieure, alors le segment AB est entièrement contenu dans la zone intérieure.

- La conjecture est démontrée si la courbe est dotée d'un centre de symétrie ou d'un axe de symétrie.

L'un des résultats les plus puissants concernant la conjecture a été démontré en 1989 par Walter Stromquist, du *Swarthmore College* aux États-Unis. Il indique que la conjecture est vraie pour toute courbe « localement monotone ». La propriété d'être localement monotone signifie en gros que la courbe ne fait pas de zigzag à toute échelle (voir la figure 2) : elle peut en faire un peu, mais les zigzags ne doivent pas s'accumuler en un point. Ce résultat permet de traiter le cas de tous les polygones et de toutes les courbes fermées obtenues en collant un nombre fini de bouts de droites, d'arcs de cercles, d'ellipses, de sinusoides, etc. Toutes les courbes que vous tracerez à la craie entrent dans le champ du théorème de Stromquist !

1. Carré inscrit et table sur un monticule

La conjecture de Toeplitz est l'affirmation, toujours sans démonstration en 2012, que toute courbe fermée simple (une boucle ne se coupant pas) contient quatre points formant les sommets d'un carré (a), que l'on dénomme « carré inscrit ».

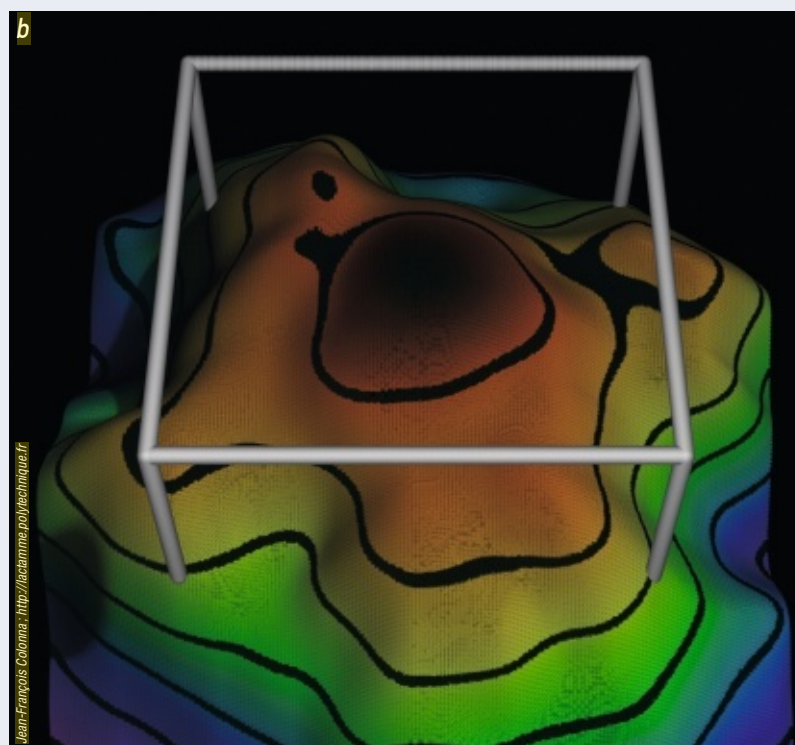
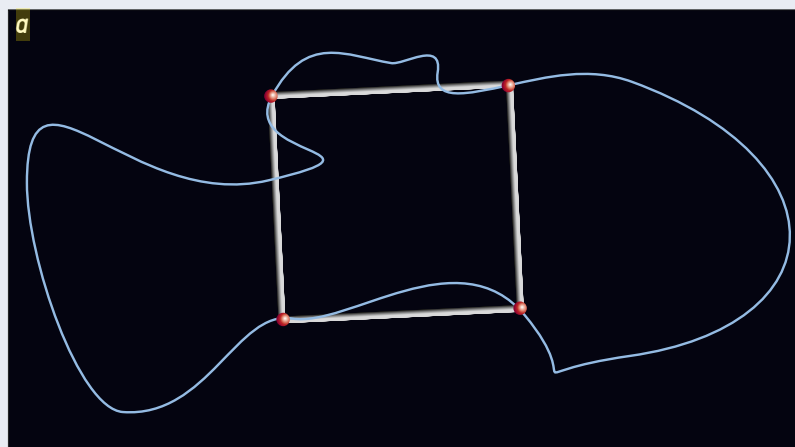
Le problème de la table carrée sur un monticule (b) est

un problème du même type à trois dimensions : peut-on placer horizontalement une table pour qu'elle soit stable, c'est-à-dire telle que les quatre pieds (chacun de même longueur et infiniment fins, formant un carré) touchent la surface ?

Le théorème de la table de Roger Fenn indique les

conditions sur la surface du monticule qui assurent que toute table à base carrée pas trop grande pourra être convenablement posée.

Ce théorème totalement démontré contourne la conjecture de Toeplitz toujours incertaine. Nous voilà rassurés pour notre prochain pique-nique.



Jean-François Colonna : <http://icadonna.polytechnique.fr>

2. La conjecture de Toeplitz est presque démontrée

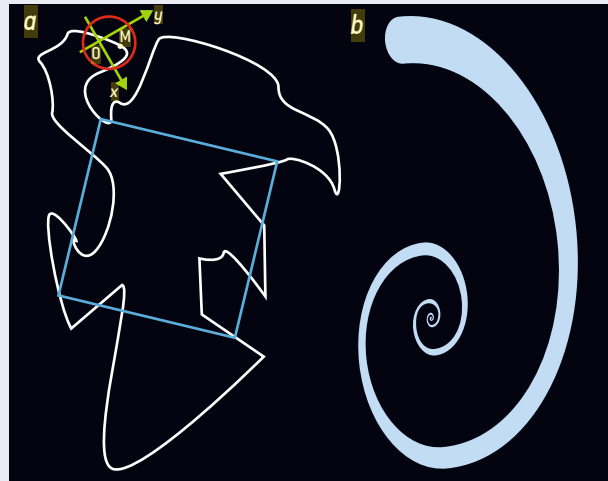
Walter Stromquist a démontré en 1989 que si une courbe fermée simple du plan est *localement monotone*, alors elle possède nécessairement un carré inscrit.

Par définition, pour qu'une courbe soit localement monotone (a), on doit pouvoir associer, à chaque point M de la courbe, un système d'axes Oxy de façon qu'un petit morceau de la courbe autour de M soit tel que deux points de ce bout de courbe ne sont jamais sur une droite parallèle à l'axe Oy.

À l'exception des courbes fractales et de quelques courbes

bizarres, toutes les courbes envisagées en mathématiques sont localement monotones et donc le théorème de Stromquist démontre de manière presque définitive la conjecture de Toeplitz.

Le problème est qu'on ne sait pas se débarrasser du « presque » ! La courbe fermée simple (b) entourant le domaine en bleu est lisse en tous points, sauf au centre où la condition de monotonie locale n'est pas vérifiée. À moins d'un argument particulier, on ne peut lui appliquer le théorème de Stromquist et on n'est donc pas certain qu'elle possède un carré inscrit.



Malheureusement certaines courbes fractales ne sont pas localement monotones, et la conjecture n'est donc pas démontrée pour cette famille de courbes. On obtient une courbe pour laquelle la conjecture n'est pas prouvée en mettant bout à bout des morceaux de la courbe du flocon de von Koch de façon à obtenir une courbe non symétrique.

Le flocon de von Koch lui-même est un exemple intéressant : sa symétrie assure qu'il comporte au moins un carré inscrit. Une étude graphique empirique de Francesco De Comité, au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, suggère fortement que le flocon comporte une infinité de carrés inscrits, mais pour l'instant le résultat n'est pas établi rigoureusement (voir la figure 3).

Errare humanum est...

Certaines erreurs sont des pièges dans lesquels nous sommes irrésistiblement attirés. Un joli piège est à l'origine de plusieurs résultats faux, heureusement repérés depuis leur publication. Une idée naturelle pour démontrer le cas général consiste à approcher une courbe fermée simple C par une suite $C_0, C_1, C_2, \dots$ de courbes régulières (par exemple des polygones) pour lesquelles on sait qu'il y a un carré inscrit. Partant de cette

suite de carrés (qui n'est pas nécessairement convergente), on sait en extraire une suite convergente de carrés (on ne retient que certains des carrés de la suite). Le fait que les courbes C_i convergent vers C assure que le carré limite de la suite convergente extraite est un carré inscrit dans C .

La conjecture est-elle démontrée ? Hélas non, car, sauf argument supplémentaire, rien n'interdit à la suite extraite de carrés de converger vers un carré... de côté nul.  videmment, cela n'a aucun intérêt, car même si on ne l'a pas précisé dans l'énoncé de la conjecture, il est clair qu'on a exclu le cas des carrés inscrits réduits à un seul point. De nombreuses tentatives de démonstration de la conjecture de Toeplitz et plusieurs démonstrations de cas particuliers exploitent l'idée ici décrite en s'arrangeant pour que le carré limite ne se réduise pas à un point.

La situation aujourd'hui est donc indéterminée, et il n'est pas exclu que les courbes fermées simples du plan qui contiennent les quatre coins d'un carré constituent un sous-ensemble « maigre » de l'ensemble de toutes les courbes fermées simples. La notion de « sous-ensemble maigre » (allez voir la définition de Wikipédia...) exprime l'idée de rareté dans le contexte topologique des ensembles de courbes continues. Elle

a une certaine analogie avec le fait que les nombres rationnels (rapports de deux entiers) sont rares dans l'ensemble des nombres réels. Il est amusant de constater que les cas pour lesquels on a démontré la conjecture recouvrent la grande majorité des courbes que les mathématiciens envisagent, mais que cette partie pourrait malgré tout être infime (« maigre »).

L'apparente contradiction tient à ce que les mathématiciens étudient en priorité les courbes régulières et que celles-ci ne sont pas représentatives des courbes qu'on rencontrerait si on les choisissait au hasard.

La situation est assez analogue à celle des nombres réels calculables, nombres pour lesquels il existe un algorithme qui en énumère indéfiniment les décimales. Les nombres calculables constituent une partie infime des nombres réels (c'est un ensemble qui a autant d'éléments qu'il y a d'entiers, alors qu'il y a plus de nombres réels que d'entiers), ce qui n'empêche pas qu'il a fallu attendre Alan Turing pour réaliser en 1936 qu'il existait des nombres non calculables et en désigner un !

  défaut de faire avancer directement l'énigme récalcitrante de Toeplitz, on tente de comprendre ce qui se passe dans des situations mathématiques proches. Que dire des rectangles, des triangles, des losanges ?