

2. La conjecture de Toeplitz est presque démontrée

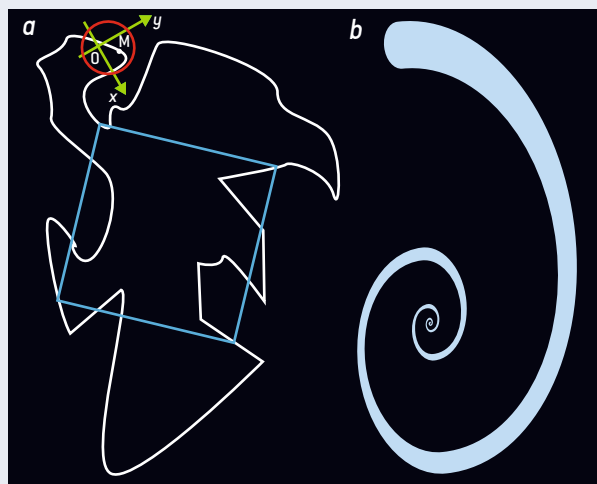
Walter Stromquist a démontré en 1989 que si une courbe fermée simple du plan est *localement monotone*, alors elle possède nécessairement un carré inscrit.

Par définition, pour qu'une courbe soit localement monotone (a), on doit pouvoir associer, à chaque point M de la courbe, un système d'axes Oxy de façon qu'un petit morceau de la courbe autour de M soit tel que deux points de ce bout de courbe ne sont jamais sur une droite parallèle à l'axe Oy.

À l'exception des courbes fractales et de quelques courbes

bizarres, toutes les courbes envisagées en mathématiques sont localement monotones et donc le théorème de Stromquist démontre de manière presque définitive la conjecture de Toeplitz.

Le problème est qu'on ne sait pas se débarrasser du « presque » ! La courbe fermée simple (b) entourant le domaine en bleu est lisse en tous points, sauf au centre où la condition de monotonie locale n'est pas vérifiée. À moins d'un argument particulier, on ne peut lui appliquer le théorème de Stromquist et on n'est donc pas certain qu'elle possède un carré inscrit.



Malheureusement certaines courbes fractales ne sont pas localement monotones, et la conjecture n'est donc pas démontrée pour cette famille de courbes. On obtient une courbe pour laquelle la conjecture n'est pas prouvée en mettant bout à bout des morceaux de la courbe du flocon de von Koch de façon à obtenir une courbe non symétrique.

Le flocon de von Koch lui-même est un exemple intéressant : sa symétrie assure qu'il comporte au moins un carré inscrit. Une étude graphique empirique de Francesco De Comit , au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, suggère fortement que le flocon comporte une infinité de carrés inscrits, mais pour l'instant le résultat n'est pas établi rigoureusement (voir la figure 3).

Errare humanum est...

Certaines erreurs sont des pièges dans lesquels nous sommes irrésistiblement attirés. Un joli piège est à l'origine de plusieurs résultats faux, heureusement repérés depuis leur publication. Une idée naturelle pour démontrer le cas général consiste à approcher une courbe fermée simple C par une suite $C_0, C_1, C_2, \dots$ de courbes régulières (par exemple des polygones) pour lesquelles on sait qu'il y a un carré inscrit. Partant de cette

suite de carrés [qui n'est pas nécessairement convergente], on sait en extraire une suite convergente de carrés (on ne retient que certains des carrés de la suite). Le fait que les courbes C_i convergent vers C assure que le carré limite de la suite convergente extraite est un carré inscrit dans C .

La conjecture est-elle démontrée ? Hélas non, car, sauf argument supplémentaire, rien n'interdit à la suite extraite de carrés de converger vers un carré... de côté nul.  videmment, cela n'a aucun intérêt, car même si on ne l'a pas précisé dans l'énoncé de la conjecture, il est clair qu'on a exclu le cas des carrés inscrits réduits à un seul point. De nombreuses tentatives de démonstration de la conjecture de Toeplitz et plusieurs démonstrations de cas particuliers exploitent l'idée ici décrite en s'arrangeant pour que le carré limite ne se réduise pas à un point.

La situation aujourd'hui est donc indéterminée, et il n'est pas exclu que les courbes fermées simples du plan qui contiennent les quatre coins d'un carré constituent un sous-ensemble « maigre » de l'ensemble de toutes les courbes fermées simples. La notion de « sous-ensemble maigre » [allez voir la définition de Wikipédia...] exprime l'idée de rareté dans le contexte topologique des ensembles de courbes continues. Elle

a une certaine analogie avec le fait que les nombres rationnels (rapports de deux entiers) sont rares dans l'ensemble des nombres réels. Il est amusant de constater que les cas pour lesquels on a démontré la conjecture recouvrent la grande majorité des courbes que les mathématiciens envisagent, mais que cette partie pourrait malgré tout être infime (« maigre »).

L'apparente contradiction tient à ce que les mathématiciens étudient en priorité les courbes régulières et que celles-ci ne sont pas représentatives des courbes qu'on rencontrerait si on les choisissait au hasard.

La situation est assez analogue à celle des nombres réels calculables, nombres pour lesquels il existe un algorithme qui en énumère indéfiniment les décimales. Les nombres calculables constituent une partie infime des nombres réels (c'est un ensemble qui a autant d'éléments qu'il y a d'entiers, alors qu'il y a plus de nombres réels que d'entiers), ce qui n'empêche pas qu'il a fallu attendre Alan Turing pour réaliser en 1936 qu'il existait des nombres non calculables et en désigner un !

  défaut de faire avancer directement l'énigme récalcitrante de Toeplitz, on tente de comprendre ce qui se passe dans des situations mathématiques proches. Que dire des rectangles, des triangles, des losanges ?

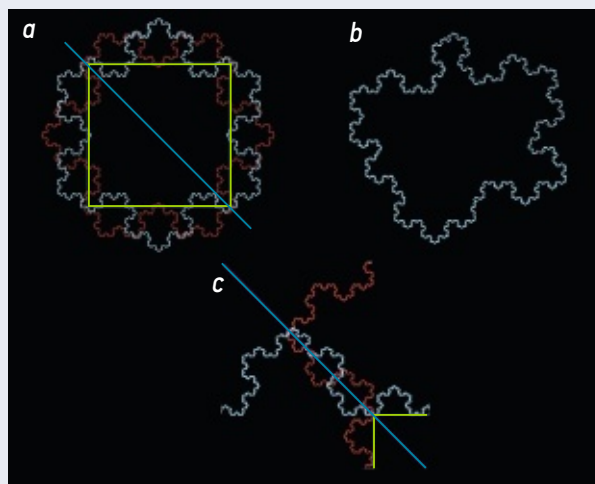
3. Le cas symétrique et la courbe de von Koch

Si une courbe fermée simple du plan possède un centre de symétrie, alors elle possède un carré inscrit : en superposant la courbe à une copie tournée de 90° , on obtient une figure invariante par rotation de 90° . Les points communs à la courbe initiale et à sa version tournée de 90° sont les sommets d'un carré inscrit (a).

Le flocon de von Koch n'est pas localement monotone et le résultat de Stromquist ne s'applique pas. Toutefois, il possède un centre de symétrie et donc un carré inscrit. La figure (b) a été obtenue en recollant des bouts de courbes prises sur

le flocon de von Koch de manière à éviter toute symétrie : on obtient une figure qu'aucun des théorèmes connus ne permet de traiter : cette figure ne possède peut-être aucun carré inscrit.

La figure (c) montre la partie de l'image (a) où le flocon de von Koch rencontre sa version tournée de 90° . Chaque point de rencontre détermine un carré inscrit. On est persuadé qu'il y a un nombre infini de points d'intersection, et donc de carrés inscrits. Ce travail empirique réalisé par Francesco De Comitè n'a pour l'instant pas été confirmé par une démonstration.



Que deviennent ces questions quand on passe du plan à l'espace ? Que deviennent ces questions en géométrie discrète où l'on envisage des courbes composées de pixels en nombre fini (seules courbes que l'informatique considère) ?

Remplacer le carré par un rectangle, un triangle, un losange

Commençons par rendre le problème plus facile en remplaçant le carré recherché par un rectangle. Cette version a été résolue par Herbert Vaughan en 1977 : toute courbe fermée simple du plan contient au moins un rectangle inscrit. Cette propriété est démontrée en quelques lignes.

Et dans l'espace à trois dimensions, une courbe fermée simple contient-elle toujours un rectangle inscrit ? Non, un contre-exemple a montré qu'il existe des courbes de l'espace ne possédant aucun rectangle inscrit (et donc aucun carré inscrit). Un résultat de 1995, positif cette fois, de Mark Nielsen et S. Wright établit que dans l'espace, toute courbe fermée simple symétrique par rapport à un plan ou symétrique par rapport à un point possède un rectangle inscrit.

Et pour les triangles ? La réponse est catégorique : toute courbe fermée simple du plan possède au moins un triangle équilatéral inscrit.

Ce résultat se généralise à un triangle quelconque : si T est un triangle fixé, et que C est une courbe fermée simple du plan, alors C contient au moins les trois sommets d'un triangle semblable à T . En fait, M. Nielsen a indiqué en 1992 qu'il existe une infinité de points de la courbe qui sont sommets d'un triangle semblable à T inscrit dans C et que ces points forment un sous-ensemble dense de la courbe : entre deux points différents de la courbe, aussi proches soient-ils, il existe toujours un point P sommet d'un triangle semblable à T inscrit dans C .

Pour les losanges et donc aussi pour les parallélogrammes, c'est encore bon : toute courbe fermée simple du plan contient au moins un losange inscrit.

Le théorème de M. Nielsen qui établit ce résultat montre de plus que, si une direction est fixée, on peut demander au losange recherché d'avoir deux de ses côtés parallèles à cette direction. V. Makleev, de l'Université de Saint-Petersbourg, a établi en 2004 que le résultat était encore vrai dans l'espace (sans, cette fois, que l'on puisse imposer à certains côtés du losange d'être parallèles à une direction donnée).

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).