

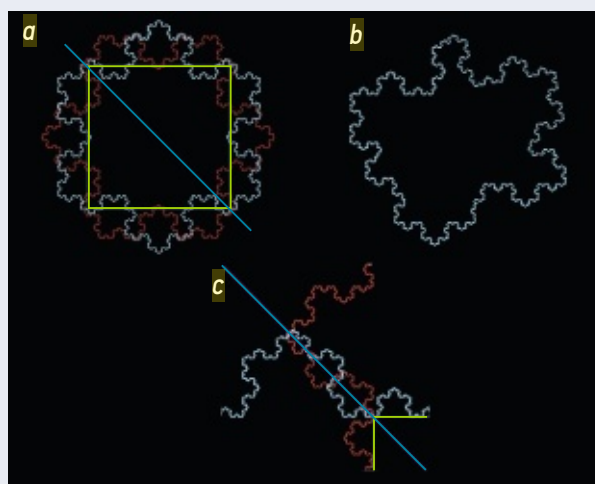
3. Le cas symétrique et la courbe de von Koch

Si une courbe fermée simple du plan possède un centre de symétrie, alors elle possède un carré inscrit : en superposant la courbe à une copie tournée de 90° , on obtient une figure invariante par rotation de 90° . Les points communs à la courbe initiale et à sa version tournée de 90° sont les sommets d'un carré inscrit (a).

Le flocon de von Koch n'est pas localement monotone et le résultat de Stromquist ne s'applique pas. Toutefois, il possède un centre de symétrie et donc un carré inscrit. La figure (b) a été obtenue en recollant des bouts de courbes prises sur

le flocon de von Koch de manière à éviter toute symétrie : on obtient une figure qu'aucun des théorèmes connus ne permet de traiter : cette figure ne possède peut-être aucun carré inscrit.

La figure (c) montre la partie de l'image (a) où le flocon de von Koch rencontre sa version tournée de 90° . Chaque point de rencontre détermine un carré inscrit. On est persuadé qu'il y a un nombre infini de points d'intersection, et donc de carrés inscrits. Ce travail empirique réalisé par Francesco De Comitè n'a pour l'instant pas été confirmé par une démonstration.



Que deviennent ces questions quand on passe du plan à l'espace ? Que deviennent ces questions en géométrie discrète où l'on envisage des courbes composées de pixels en nombre fini (seules courbes que l'informatique considère) ?

Remplacer le carré par un rectangle, un triangle, un losange

Commençons par rendre le problème plus facile en remplaçant le carré recherché par un rectangle. Cette version a été résolue par Herbert Vaughan en 1977 : toute courbe fermée simple du plan contient au moins un rectangle inscrit. Cette propriété est démontrée en quelques lignes.

Et dans l'espace à trois dimensions, une courbe fermée simple contient-elle toujours un rectangle inscrit ? Non, un contre-exemple a montré qu'il existe des courbes de l'espace ne possédant aucun rectangle inscrit (et donc aucun carré inscrit). Un résultat de 1995, positif cette fois, de Mark Nielsen et S. Wright établit que dans l'espace, toute courbe fermée simple symétrique par rapport à un plan ou symétrique par rapport à un point possède un rectangle inscrit.

Et pour les triangles ? La réponse est catégorique : toute courbe fermée simple du plan possède au moins un triangle équilatéral inscrit.

Ce résultat se généralise à un triangle quelconque : si T est un triangle fixé, et que C est une courbe fermée simple du plan, alors C contient au moins les trois sommets d'un triangle semblable à T . En fait, M. Nielsen a indiqué en 1992 qu'il existe une infinité de points de la courbe qui sont sommets d'un triangle semblable à T inscrit dans C et que ces points forment un sous-ensemble dense de la courbe : entre deux points différents de la courbe, aussi proches soient-ils, il existe toujours un point P sommet d'un triangle semblable à T inscrit dans C .

Pour les losanges et donc aussi pour les parallélogrammes, c'est encore bon : toute courbe fermée simple du plan contient au moins un losange inscrit.

Le théorème de M. Nielsen qui établit ce résultat montre de plus que, si une direction est fixée, on peut demander au losange recherché d'avoir deux de ses côtés parallèles à cette direction. V. Makleev, de l'Université de Saint-Petersbourg, a établi en 2004 que le résultat était encore vrai dans l'espace (sans, cette fois, que l'on puisse imposer à certains côtés du losange d'être parallèles à une direction donnée).

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

4. Quatre petits problèmes

• Existe-t-il des courbes fermées simples du plan qui possèdent des carrés inscrits passant par chacun de leurs points ?

Un cercle et un carré ont bien sûr cette propriété. De nombreuses autres courbes fermées possèdent cette propriété (dont toutes les courbes invariantes par une rotation de 90°). Francesco De Comit  a dessiné les figures *a*, *b*, *c*, *d*.

• Trouver une courbe fermée simple du plan n'ayant qu'un seul carré inscrit.

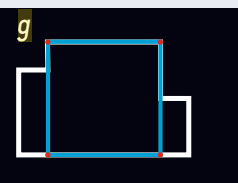
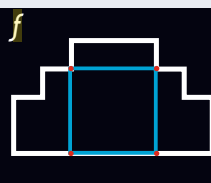
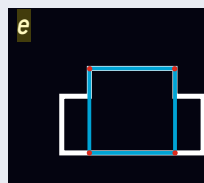
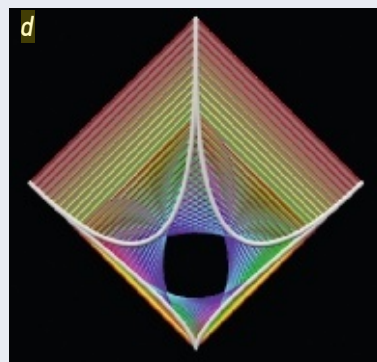
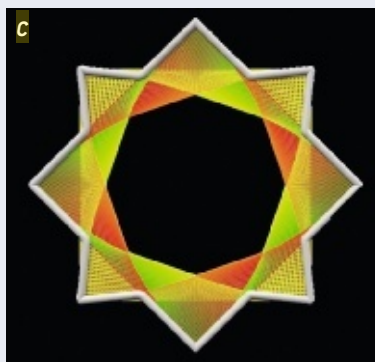
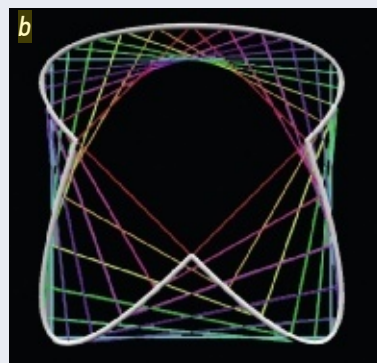
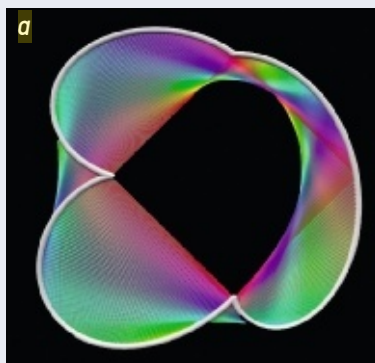
Solution : voir les figures *e*, *f*, *g*.

• Toute courbe fermée simple du plan contient-elle les sommets d'un pentagone régulier inscrit ? [Autrement dit, la conjecture de Toeplitz avec les carrés se généralise-t-elle avec les pentagones ?]

Non. Un triangle équilatéral, à cause des problèmes créés par les angles, ne peut pas contenir les cinq points d'un pentagone régulier. De la même façon, une courbe fermée simple du plan ne contient pas toujours un polygone régulier de plus de cinq côtés.

• Tout point *P* donné d'une courbe fermée simple *C* est-il le sommet d'un triangle équilatéral inscrit dans *C* ?

Non. Soit *C* un triangle isocèle dont l'angle au sommet est inférieur à 120° . Ce sommet *P* ne peut pas être le sommet d'un triangle équilatéral inscrit dans *C*.



5. Les courbes informatiques

Les différents pixels d'une courbe (assimilés à des petits carrés sur un quadrillage) forment une chaîne de voisins.

Dans le cas des courbes fines, le mot « voisins » signifie « avoir au moins *un point* en commun ». Pour les courbes épaisses, deux

pixels voisins de la courbe doivent avoir au moins *un côté* en commun.

Pour éviter les recouvrements et imposer le retour au pixel de départ (courbe fermée simple), on ajoute dans les deux cas que chaque pixel possède deux voisins exactement. Le problème du

carré inscrit dans le monde discret des pixels est alors clairement posé... et a été résolu en 2011 :

- toute courbe épaisse fermée simple possède au moins un carré inscrit (*a*) ;
- il existe des courbes fines fermées simples qui n'ont pas de carré inscrit (*b*).

Dans une courbe «  paisse », deux pixels voisins ont au moins un côté en commun (*a*). Dans une courbe « fine », deux pixels voisins ont au moins un point en commun (*b*, deux exemples d'une telle courbe). Les propriétés de ces courbes vis-à-vis des carrés inscrits sont différentes.

