

4. Quatre petits problèmes

• Existe-t-il des courbes fermées simples du plan qui possèdent des carrés inscrits passant par chacun de leurs points ?

Un cercle et un carré ont bien sûr cette propriété. De nombreuses autres courbes fermées possèdent cette propriété (dont toutes les courbes invariantes par une rotation de 90°). Francesco De Comité a dessiné les figures *a*, *b*, *c*, *d*.

• Trouver une courbe fermée simple du plan n'ayant qu'un seul carré inscrit.

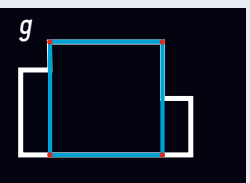
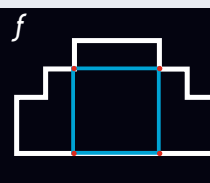
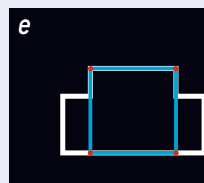
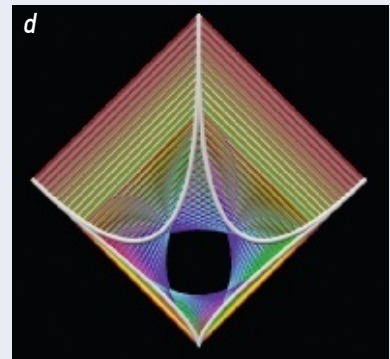
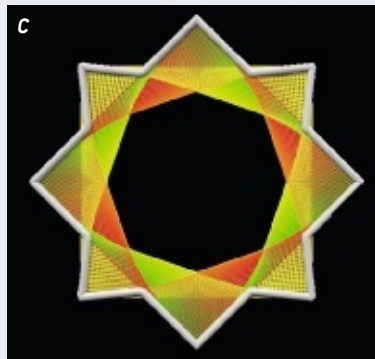
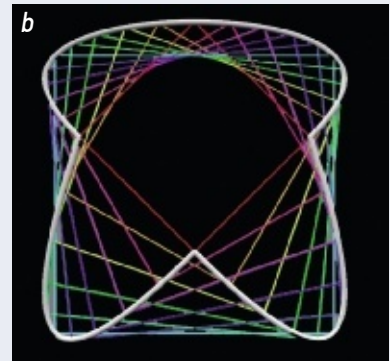
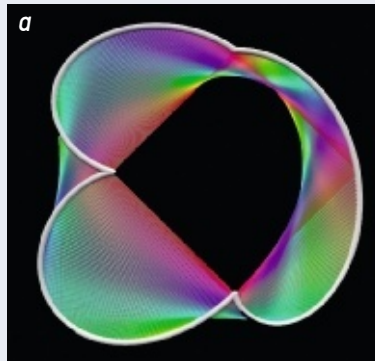
Solution : voir les figures *e*, *f*, *g*.

• Toute courbe fermée simple du plan contient-elle les sommets d'un pentagone régulier inscrit ? [Autrement dit, la conjecture de Toeplitz avec les carrés se généralise-t-elle avec les pentagones ?]

Non. Un triangle équilatéral, à cause des problèmes créés par les angles, ne peut pas contenir les cinq points d'un pentagone régulier. De la même façon, une courbe fermée simple du plan ne contient pas toujours un polygone régulier de plus de cinq côtés.

• Tout point *P* donné d'une courbe fermée simple *C* est-il le sommet d'un triangle équilatéral inscrit dans *C* ?

Non. Soit *C* un triangle isocèle dont l'angle au sommet est inférieur à 120° . Ce sommet *P* ne peut pas être le sommet d'un triangle équilatéral inscrit dans *C*.



5. Les courbes informatiques

Les différents pixels d'une courbe (assimilés à des petits carrés sur un quadrillage) forment une chaîne de voisins.

Dans le cas des courbes fines, le mot « voisins » signifie « avoir au moins un point en commun ». Pour les courbes épaisses, deux

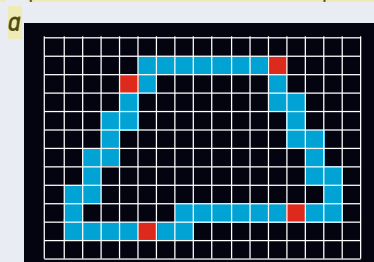
pixels voisins de la courbe doivent avoir au moins un côté en commun.

Pour éviter les recouvrements et imposer le retour au pixel de départ (courbe fermée simple), on ajoute dans les deux cas que chaque pixel possède deux voisins exactement. Le problème du

carré inscrit dans le monde discret des pixels est alors clairement posé... et a été résolu en 2011 :

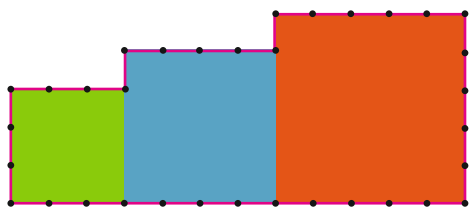
– toute courbe épaisse fermée simple possède au moins un carré inscrit (*a*) ;
– il existe des courbes fines fermées simples qui n'ont pas de carré inscrit (*b*).

Dans une courbe «  paisse », deux pixels voisins ont au moins un côté en commun (*a*). Dans une courbe « fine », deux pixels voisins ont au moins un point en commun (*b*, deux exemples d'une telle courbe). Les propriétés de ces courbes vis-à-vis des carrés inscrits sont différentes.



Un carré est constitué de deux paires de côtés opposés parallèles et ses deux diagonales ont même longueur. Une généralisation du carré dans l'espace est le quadrilatère ayant ses quatre côtés égaux ainsi que ses deux diagonales, que nous nommerons « le quasi-carré ». Jason Cantarella et John McCleary, aux États-Unis, ont démontré que toute courbe fermée simple assez régulière de l'espace à trois dimensions possède un tel quasi-carré inscrit. « Assez régulière » signifie que la courbe est non seulement continue, mais qu'elle a une tangente en chaque point, tangente qui varie continûment quand le point de tangence glisse le long de la courbe.

Les carrés inscrits peuvent-ils être nombreux ? Peut-il par exemple y en avoir cinq, ni plus ni moins ? Là encore, bien que les résultats soient récents, on n'a pas rencontré d'obstacles majeurs. Pour tout entier strictement positif n , il existe une courbe fermée simple du plan qui possède exactement n carrés inscrits. Le résultat a été démontré en 2008 par Strashimir Popvassilev, au *City College* de New York, qui a pu établir qu'on peut imposer de plus à la courbe d'être indéfiniment différentiable (c'est-à-dire parfaitement lisse) et même qu'on peut avoir exactement n carrés inscrits en imposant à la courbe de délimiter une zone intérieure convexe. Le théorème est patent pour les polygones, comme le montre la figure ci-dessous qui résout le cas $n = 3$ et qui se généralise de façon évidente.



Le nombre de carrés inscrits sera fréquemment impair. En effet, si la courbe fermée simple est un polygone n'ayant rien de particulier, deux de ses côtés ne sont jamais parallèles ni orthogonaux, ou si la courbe fermée simple est extrêmement lisse, définie par des fonctions analytiques, alors le nombre de carrés inscrits est infini ou impair.

Par ailleurs, le mathématicien japonais Shizuo Kakutani a démontré en 1942 que

tout volume convexe de l'espace peut être enfermé dans un cube exinscrit dont chaque face touchera le volume. Notons enfin qu'un théorème de l'Anglais Roger Fenn a réglé en 1970 le problème de la table évoqué au début de l'article. Si la fonction continue définissant le monticule est positive sur un ensemble convexe et nulle ailleurs, alors toute table carrée pas trop grande pourra être convenablement posée sur le monticule.

Carrés inscrits sur courbes pixellisées

Les travaux de Feliú Sagols et Raúl Marín, de l'Institut polytechnique national du Mexique, auront peut-être des applications puisqu'ils concernent les figures dessinées avec des pixels et que des algorithmes de calculs des carrés inscrits ont été proposés.

Le plan discret n'est qu'un tableau de cases carrées, les pixels, constituant un grand quadrillage. Deux notions de courbes discrètes sont naturelles : les courbes fines et les courbes épaisses (voir la figure 5). Le problème du carré inscrit se pose dans ce contexte : toute courbe épaisse fermée simple contient les quatre coins d'un carré et il existe des courbes fines fermées simples qui ne contiennent aucun carré inscrit (jamais quatre de leurs pixels ne sont les quatre coins d'un carré).

La démonstration du résultat positif concernant les courbes épaisses n'est pas aussi simple qu'on l'imagine. Cela montre une fois encore que bien des problèmes du continu ont des traductions intéressantes dans le monde du fini des pixels et de l'informatique.

Le monde mathématique est étrange et certains passages semblent interdits. Même dans des domaines élémentaires (comme celui des courbes fermées simples du plan) pour lesquels on s'imaginait bien armé par les outils de l'analyse et de la géométrie, on butte sur des obstacles durs comme le diamant. Rien ne nous permet de reconnaître ces problèmes difficiles avant qu'on ne se cogne à eux et ils semblent surgir au hasard. Ils s'amusent à humilier une communauté vieille de plus de trois millénaires !

BIBLIOGRAPHIE

B. Matschke, *Equivariant topology methods in discrete geometry*, Thèse de l'Univ. de Berlin, 2011.

J. Cottanceau, *La randonnée du carré*, Blog « Choux romanesco, Vache qui rit et intégrales curvilignes », 2011 : <http://eljidx.canalblog.com/archives/2011/03/20/20671768.html>

I. Pak, *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, 2010. <http://www.math.ucla.edu/~pak/geopol8.pdf>

F. Sagols et R. Marín, *Two discrete versions of the Inscribed Square Conjecture and some related problems*, *Theoretical Computer Science*, vol. 412, pp. 1301-1312, 2011.

M. Nielsen, *Rhombi inscribed in simple closed curves*, *Geometriae Dedicata*, vol. 54, pp. 245-254, 1995.

M. Nielsen, *Triangles inscribed in simple closed curves*, *Geometriae Dedicata*, vol. 43, pp. 291-297, 1992.

V. Klee et S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, 1991.

W. Stromquist, *Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves*, *Mathematika*, vol. 36, pp. 187-197, 1989.

R. Fenn, *The table theorem*, *Bull. London Math. Soc.*, vol. 2, pp. 73-76, 1970.

O. Toeplitz, *Ueber einige Aufgaben der Analysis situs*, *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn*, vol. 4, p. 197, 1911.