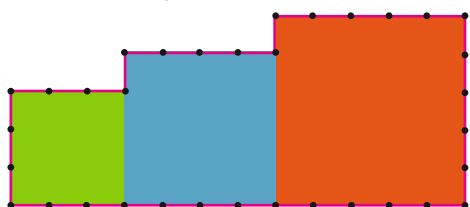


Un carré est constitué de deux paires de côtés opposés parallèles et ses deux diagonales ont même longueur. Une généralisation du carré dans l'espace est le quadrilatère ayant ses quatre côtés égaux ainsi que ses deux diagonales, que nous nommerons « le quasi-carré ». Jason Cantarella et John McCleary, aux États-Unis, ont démontré que toute courbe fermée simple assez régulière de l'espace à trois dimensions possède un tel quasi-carré inscrit. « Assez régulière » signifie que la courbe est non seulement continue, mais qu'elle a une tangente en chaque point, tangente qui varie continûment quand le point de tangence glisse le long de la courbe.

Les carrés inscrits peuvent-ils être nombreux ? Peut-il par exemple y en avoir cinq, ni plus ni moins ? Là encore, bien que les résultats soient récents, on n'a pas rencontré d'obstacles majeurs. Pour tout entier strictement positif n , il existe une courbe fermée simple du plan qui possède exactement n carrés inscrits. Le résultat a été démontré en 2008 par Strashimir Popvassilev, au *City College* de New York, qui a pu établir qu'on peut imposer de plus à la courbe d'être indéfiniment différentiable (c'est-à-dire parfaitement lisse) et même qu'on peut avoir exactement n carrés inscrits en imposant à la courbe de délimiter une zone intérieure convexe. Le théorème est patent pour les polygones, comme le montre la figure ci-dessous qui résout le cas $n = 3$ et qui se généralise de façon évidente.



Le nombre de carrés inscrits sera fréquemment impair. En effet, si la courbe fermée simple est un polygone n'ayant rien de particulier, deux de ses côtés ne sont jamais parallèles ni orthogonaux, ou si la courbe fermée simple est extrêmement lisse, définie par des fonctions analytiques, alors le nombre de carrés inscrits est infini ou impair.

Par ailleurs, le mathématicien japonais Shizuo Kakutani a démontré en 1942 que

tout volume convexe de l'espace peut être enfermé dans un cube exinscrit dont chaque face touchera le volume. Notons enfin qu'un théorème de l'Anglais Roger Fenn a réglé en 1970 le problème de la table évoqué au début de l'article. Si la fonction continue définissant le monticule est positive sur un ensemble convexe et nulle ailleurs, alors toute table carrée pas trop grande pourra être convenablement posée sur le monticule.

Carrés inscrits sur courbes pixellisées

Les travaux de Feliú Sagols et Raúl Marín, de l'Institut polytechnique national du Mexique, auront peut-être des applications puisqu'ils concernent les figures dessinées avec des pixels et que des algorithmes de calculs des carrés inscrits ont été proposés.

Le plan discret n'est qu'un tableau de cases carrées, les pixels, constituant un grand quadrillage. Deux notions de courbes discrètes sont naturelles : les courbes fines et les courbes épaisses (voir la figure 5). Le problème du carré inscrit se pose dans ce contexte : toute courbe épaisse fermée simple contient les quatre coins d'un carré et il existe des courbes fines fermées simples qui ne contiennent aucun carré inscrit (jamais quatre de leurs pixels ne sont les quatre coins d'un carré).

La démonstration du résultat positif concernant les courbes épaisses n'est pas aussi simple qu'on l'imagine. Cela montre une fois encore que bien des problèmes du continu ont des traductions intéressantes dans le monde du fini des pixels et de l'informatique.

Le monde mathématique est étrange et certains passages semblent interdits. Même dans des domaines élémentaires (comme celui des courbes fermées simples du plan) pour lesquels on s'imaginait bien armé par les outils de l'analyse et de la géométrie, on butte sur des obstacles durs comme le diamant. Rien ne nous permet de reconnaître ces problèmes difficiles avant qu'on ne se cogne à eux et ils semblent surgir au hasard. Ils s'amusent à humilier une communauté vieille de plus de trois millénaires !

✓ BIBLIOGRAPHIE

B. Matschke, *Equivariant topology methods in discrete geometry*, Thèse de l'Univ. de Berlin, 2011.

J. Cottanceau, *La randonnée du carré*, Blog « Choux romanesco, Vache qui rit et intégrales curvilignes », 2011 : <http://eljjdx.canalblog.com/archives/2011/03/20/20671768.html>

I. Pak, *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, 2010. <http://www.math.ucla.edu/~pak/geompol8.pdf>

F. Sagols et R. Marín, *Two discrete versions of the Inscribed Square Conjecture and some related problems*, *Theoretical Computer Science*, vol. 412, pp. 1301-1312, 2011.

M. Nielsen, *Rhombi inscribed in simple closed curves*, *Geometriae Dedicata*, vol. 54, pp. 245-254, 1995.

M. Nielsen, *Triangles inscribed in simple closed curves*, *Geometriae Dedicata*, vol. 43, pp. 291-297, 1992.

V. Klee et S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, 1991.

W. Stromquist, *Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves*, *Mathematika*, vol. 36, pp. 187-197, 1989.

R. Fenn, *The table theorem*, *Bull. London Math. Soc.*, vol. 2, pp. 73-76, 1970.

O. Toeplitz, *Ueber einige Aufgaben der Analysis situs*, *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn*, vol. 4, p. 197, 1911.

 ART & SCIENCE

Vermeer, la carte et le castor

Dans L'Officier et la jeune fille riante, un homme porte un chapeau en feutre de castor, matériau précieux dont la confection a participé à la disparition des espèces européennes. À l'arrière-plan, une carte intrigue...

Loïc MANGIN

Pays-Bas, vers 1658. Les Provinces-Unies (l'ancien nom des Pays-Bas) ont déclaré leur indépendance vis-à-vis du trône d'Espagne depuis près de 80 ans, et elle est quasi effective en 1609. Les combats cessent définitivement en 1648 et les militaires, de retour à la vie civile, ont tout loisir de conter fleurette. En 1658 donc, c'est un tel épisode que peint Johannes Vermeer (1632-1675) dans *L'Officier et la jeune fille riante* (voir page ci-contre), une toile conservée à New York.

De dos, un militaire vêtu d'un uniforme rouge éclatant et d'un grand chapeau noir, sur lequel nous reviendrons, disserte avec la jeune fille qui le reçoit et dont il espère sans doute les faveurs. Précisons que l'habitude de se découvrir en présence d'une demoiselle n'était pas encore adoptée. Sur le mur, au fond, une carte étonne.

Elle est intitulée *La Topographie nouvelle et très exacte de toute la Hollande et de la Frise occidentale*. Elle représente la partie occidentale, donnant sur la mer, des nouvelles Provinces-Unies (la Hollande et la Frise en sont deux), l'Ouest étant au sommet de la carte. Cette orientation reflétait les préoccupations majeures de l'époque : les Provinces-Unies sont « tournées » vers la mer du Nord, le large, ce qui est naturel pour un peuple de marins qui a conquis le monde. On retrouve cette carte dans d'autres œuvres de Vermeer, telle *La Femme en bleu lisant une lettre*.

On constate également que les terres sont en bleu et les mers en marron. Pourquoi Vermeer a-t-il interverti les couleurs ? On l'ignore, mais Timothy Brook, historien à l'Université

d'Oxford, s'interroge : le peintre fait-il allusion au changement de prestige des militaires dû au retour de la paix ?

Venons-en au chapeau. À cette époque, au milieu du XVII^e siècle, tous les Hollandais en portaient, du simple bonnet mou, nommé *klapmuts*, au plus prestigieux couvre-chef tel celui porté par l'officier. L'objet était en feutre, une étoffe constituée de poils agglomérés d'animaux, ici du castor. Le feutre de castor était le matériau à la mode et tout individu de haut statut social se devait d'avoir un chapeau fabriqué en cette matière.

La folie des chapeliers aurait résulté des vapeurs toxiques de mercure.

La matière première nécessaire à la fabrication de ce feutre n'est pas la fourrure entière de l'animal, mais le sous-poil (des poils courts et denses distincts des poils longs). En effet, au microscope, on observe des écailles (des arpillons) qui se chevauchent sur toute la surface de ces fibres. Ces aspérités favorisent l'agglomération et donc le feutrage. De fait, le feutre de castor est résistant, flexible et il garde sa forme même mouillé.

Les chapeliers faisaient mijoter ce sous-poil dans un mélange d'acétate de cuivre, de gomme arabique et de mercure afin d'obtenir, après foulage et séchage, un feutre d'excellente qualité dédié à la fabrication des meilleurs chapeaux. Notons que la folie souvent

attribuée aux chapeliers résultait probablement des vapeurs toxiques de la mixture.

Jusqu'au XV^e siècle, on utilisait des castors d'Europe occidentale, mais l'animal fut victime de son succès et de la disparition de son habitat naturel. On se tourna alors vers les castors scandinaves, mais les mêmes causes eurent les mêmes effets, et ce fut la fin des chapeaux en castor.

Au XVI^e siècle, les chapeliers n'eurent plus à leur disposition que le feutre de laine, un matériau plus grossier. On ajoutait parfois des poils de lapin, pour faciliter l'agglomération, mais le feutre obtenu était fragile. Enfin, le feutre de laine absorbe l'eau et se déforme dès qu'il est mouillé, à l'inverse du feutre de castor. Le *klapmuts* des Hollandais de basse condition était en feutre de laine.

La situation changea à la fin du XVI^e siècle quand se développa le commerce avec les Amérindiens. Le Français Samuel de Champlain (1567-1635) fut l'un des précurseurs de ce marché. Dans les années 1580, quand les premières peaux arrivèrent en Europe, la demande explosa et ce fut le renouveau des chapeaux en castor. Ces articles se vendaient à prix d'or, à un point tel que l'on vit s'épanouir un marché du « castor d'occasion ». Ces pratiques furent néanmoins vite contrôlées par les autorités qui redoutaient les maladies dues aux poux.

Vermeer, qui jouissait d'un poste prestigieux dans la cité de Delft, avait sans doute lui aussi un chapeau en feutre de castor. Peut-être même est-ce celui qui est peint ! ■

T. Brook, *Le chapeau de Vermeer*. Le XVII^e siècle à l'aube de la mondialisation, Payot, 2010.