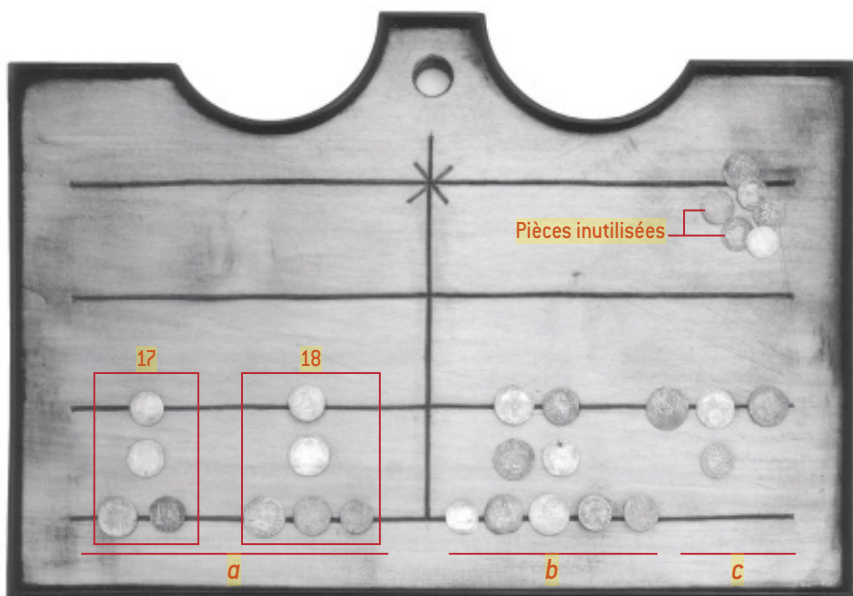


On dispose heureusement du texte de Bernelin, un élève de Gerbert qui a rapporté sa méthode alors que son maître était pape, entre 999 et 1003. Bernelin ne donne qu'une description textuelle de ses divisions, sans aucun dessin. Son texte ressemble ainsi à une suite d'instructions assez abscones : ne pouvant utiliser le zéro, ni se référer à la numération de position – qu'il connaissait pourtant peut-être, on y reviendra –, Gerbert avait été obligé d'énoncer toute une série de règles, définissant la colonne dans laquelle on place tel jeton en cours de calcul en fonction des colonnes où l'on a lu tel chiffre du dividende et tel autre du diviseur. Néanmoins, on comprend les étapes de la division en se reportant à l'opération telle que nous la pratiquons aujourd'hui (voir la figure 3 et l'encadré page ci-contre).

Un bénéfice de son séjour en Catalogne ?

Un grand mystère entoure le calculateur Gerbert : où a-t-il puisé les idées qui l'ont conduit à son abaque ? Celui-ci n'existait pas chez les Arabes de son temps, et c'est donc une invention personnelle. Mais il présente de telles ressemblances avec notre numération de position, alors déjà connue des Arabes, qu'on peut faire une hypothèse raisonnable : Gerbert en aurait pris connaissance au cours de son séjour en Catalogne, quand il avait une vingtaine d'années. À cette époque, la Catalogne, qui ne portait pas encore son nom, était la partie orientale de la Marche d'Espagne, une bande de terres longeant les Pyrénées que Charlemagne avait conquise aux Arabes à la fin du VIII^e siècle. Le reste de l'Espagne était dominé par les Arabes. Plusieurs historiens pensent que lors de son séjour dans la Marche, Gerbert a été en contact avec la science arabe, sans doute par l'intermédiaire du monastère de Santa Maria à Ripoll, à 40 kilomètres au Nord de Vich, où des moines recopiaient des traductions latines d'ouvrages arabes sur l'astronomie, la géométrie et l'arithmétique.

Mais pourquoi, alors, Gerbert n'aurait-il pas préconisé tout simplement le calcul écrit, que cette numération permettait ? C'est un autre mystère, et une nouvelle



4. SUR CET ABAQUE CLASSIQUE (XV^e siècle), les lignes correspondent, de bas en haut, aux unités, dizaines, centaines et milliers, et les positions intermédiaires aux valeurs 5, 50 et 500. La hauteur à laquelle un jeton est posé détermine la « valeur » qu'il prend momentanément. Les jetons disposés ici représentent les trois étapes d'une addition. Les deux nombres à additionner, 17 et 18 (a), sont rapprochés pour former l'addition (b), puis une réduction du nombre de jetons est effectuée (c) en remplaçant deux jetons intermédiaires valant 5 par un jeton sur la ligne des dizaines, et cinq jetons unifiés par un jeton intermédiaire entre la ligne des unités et celle des dizaines. Le résultat obtenu est trois jetons sur la ligne des dizaines et un jeton intermédiaire valant 5, soit 35.

hypothèse : il était moine et ce qui venait des Arabes était suspect. Il a peut-être craint d'être accusé de sorcellerie ; il aurait alors inventé son abaque comme un moyen terme, entre l'abaque à lignes lié aux chiffres romains et la science arabe qui connaissait la numération de position et le zéro. La question reste entière...

Supplanté par le calcul arabe

L'avenir de l'abaque de Gerbert a été très modeste, pour une raison que le moine ne pouvait pas prévoir. L'engin n'intéressait qu'une élite, les meilleurs calculateurs ; or cette même clientèle s'est jetée sur le nouveau calcul – rendu possible par la numération de position, elle-même fondée sur les chiffres arabes et le zéro – dès qu'il s'est répandu en Europe chrétienne, vers la fin du XII^e siècle. Ces mêmes personnes ont considéré dès lors l'abaque de Gerbert comme trop compliqué par rapport à la division par effacement ou biffage qu'il était désormais facile de réaliser par écrit.

L'AUTEUR

Alain SCHÄRLIG est professeur honoraire de la Faculté des Hautes études commerciales de l'Université de Lausanne, en Suisse.

✓ BIBLIOGRAPHIE

A. Schärli, *Un portrait de Gerbert d'Aurillac. Inventeur d'un abaque, utilisateur précoce des chiffres arabes, et pape de l'an mil*, PPUR, 2011.

A. Schärli, *Du zéro à la virgule, les chiffres arabes à la conquête de l'Europe, 1143-1585*, PPUR, 2010.

A. Schärli, *Compter avec des jetons. Tables à calculer et tables de compte du Moyen Âge à la Révolution*, PPUR, 2003.

B. Bakhouch (éd. et trad.), Bernelin, *Livre d'Abaque*, Princi Négrier, 2000.

LOGIQUE & CALCUL

Pour prouver, tous les moyens sont bons

Les activités mathématiques ne se réduisent pas à la logique formelle. Dessins, petits films, programmes observés, interactions physiques, etc., sont l'occasion de mener des démonstrations aussi rigoureuses que l'écriture minutieuse des preuves formelles.

Jean-Paul DELAHAYE

L'évidence paralyse la démonstration.
Pierre Reverdy (1889-1960)

Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Depuis Euclide, on pense que les mathématiques commencent avec les démonstrations. C'est certainement vrai, mais est-on sûr de savoir ce qu'est une démonstration ?

L'évolution des technologies ouvre la voie à de nombreuses pistes nouvelles bousculant les idées trop assurées des logiciens et des philosophes qui, séduits par le symbolisme, ont cru résoudre définitivement le problème. Pour le mathématicien français René Thom (1923-2002), « Est rigoureuse toute démonstration, qui,

chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion. » Cette conception ouverte, sans doute partagée par de nombreux mathématiciens, nous servira de repère et de guide.

Rappelons d'abord la façon dont les logiciens modernes envisagent la notion de preuve. Leur méthode, qualifiée de formaliste, procède en plusieurs étapes :

- On fixe un langage parfaitement précis permettant d'écrire des formules nommées énoncés.

- On choisit certains énoncés particuliers considérés comme acquis, les axiomes.

- On se donne des règles de manipulations symboliques permettant de passer d'énoncé en énoncé.

- On nomme alors démonstration (formelle) toute suite d'énoncés dont chacun est justifié soit parce qu'il s'agit d'un axiome, soit parce qu'il provient d'une manipulation autorisée à partir d'énoncés déjà obtenus.

Le tout constitue un système formel. On a su en concevoir pour l'arithmétique, la géométrie, la théorie des ensembles et tous les domaines mathématiques envisageables. Ceux de la théorie des ensembles englobent tous les autres et permettent, au moins en théorie, d'exprimer tout travail mathématique dans un langage unique, avec une notion unique de démonstration (voir l'encadré 1 pour un exemple simplifié de système formel).

Cette façon de procéder est intéressante quand on envisage d'utiliser les

1. Un petit système formel

Le système formel décrit ici produit des séquences correctes de parenthèses.

(1) Les formules sont des suites de symboles (et). (2) (est le seul axiome. (3) On a deux règles, I et II, de déduction d'un théorème à partir d'autres.

I : A et B étant démontrés, leur juxtaposition, AB, l'est aussi.

II : si A est démontré, on a aussi (A).

Exemple :

F1 : () ; c'est l'axiome du système.

F2 : (()) par la règle I appliquée à F1 prise deux fois.

F3 : (()) par la règle II appliquée à F2.

F4 : (()) par la règle I appliquée à F1 et F3.

F5 : (()) par la règle II appliquée à F4 ; etc.

Les théorèmes sont toutes les suites de parenthèses correctes dans une expression. Les suites (()) ou (())(), par exemple, sont incorrectes et indémonstrables dans ce système formel.

2. Théorème fondamental du sudoku

Le sudoku comporte 17 données initiales et pourtant il n'a qu'une seule solution. En janvier 2012, Gary McGuire a publié un article expliquant comment, à l'aide d'un long calcul qui s'est étendu sur toute l'année 2011, il a démontré (le résultat avait été pressenti, mais nullement prouvé) qu'il n'existait pas de sudoku à 16 données initiales ayant une solution unique.

Sur la page <http://mapleta.maths.uwa.edu.au/~gordon/sudoku>,

on trouvera d'autres sudokus corrects (qui n'ont qu'une solution) à 17 données.

						1	5
		8	3				
					2		
2	3				8		
				1			
8							
1	5		4				
		6			7	2	
9							