

LOGIQUE & CALCUL

Pour prouver, tous les moyens sont bons

Les activités mathématiques ne se réduisent pas à la logique formelle. Dessins, petits films, programmes observés, interactions physiques, etc., sont l'occasion de mener des démonstrations aussi rigoureuses que l'écriture minutieuse des preuves formelles.

Jean-Paul DELAHAYE

L'évidence paralyse la démonstration.
Pierre Reverdy (1889-1960)

Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Depuis Euclide, on pense que les mathématiques commencent avec les démonstrations. C'est certainement vrai, mais est-on sûr de savoir ce qu'est une démonstration ?

L'évolution des technologies ouvre la voie à de nombreuses pistes nouvelles bousculant les idées trop assurées des logiciens et des philosophes qui, séduits par le symbolisme, ont cru résoudre définitivement le problème. Pour le mathématicien français René Thom (1923-2002), « Est rigoureuse toute démonstration, qui,

chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion. » Cette conception ouverte, sans doute partagée par de nombreux mathématiciens, nous servira de repère et de guide.

Rappelons d'abord la façon dont les logiciens modernes envisagent la notion de preuve. Leur méthode, qualifiée de formaliste, procède en plusieurs étapes :

- On fixe un langage parfaitement précis permettant d'écrire des formules nommées énoncés.

- On choisit certains énoncés particuliers considérés comme acquis, les axiomes.

- On se donne des règles de manipulations symboliques permettant de passer d'énoncé en énoncé.

- On nomme alors démonstration (formelle) toute suite d'énoncés dont chacun est justifié soit parce qu'il s'agit d'un axiome, soit parce qu'il provient d'une manipulation autorisée à partir d'énoncés déjà obtenus.

Le tout constitue un système formel. On a su en concevoir pour l'arithmétique, la géométrie, la théorie des ensembles et tous les domaines mathématiques envisageables. Ceux de la théorie des ensembles englobent tous les autres et permettent, au moins en théorie, d'exprimer tout travail mathématique dans un langage unique, avec une notion unique de démonstration (voir l'encadré 1 pour un exemple simplifié de système formel).

Cette façon de procéder est intéressante quand on envisage d'utiliser les

1. Un petit système formel

Le système formel décrit ici produit des séquences correctes de parenthèses.

(1) Les formules sont des suites de symboles (et). (2) (est le seul axiome. (3) On a deux règles, I et II, de déduction d'un théorème à partir d'autres.

I : A et B étant démontrés, leur juxtaposition, AB, l'est aussi.

II : si A est démontré, on a aussi (A).

Exemple :

F1 : () ; c'est l'axiome du système.

F2 : (()) par la règle I appliquée à F1 prise deux fois.

F3 : (()) par la règle II appliquée à F2.

F4 : (())() par la règle I appliquée à F1 et F3.

F5 : (())(()) par la règle II appliquée à F4 ; etc.

Les théorèmes sont toutes les suites de parenthèses correctes dans une expression. Les suites (()) ou (())(), par exemple, sont incorrectes et indémonstrables dans ce système formel.

2. Théorème fondamental du sudoku

Ce sudoku comporte 17 données initiales et pourtant il n'a qu'une seule solution. En janvier 2012, Gary McGuire a publié un article expliquant comment, à l'aide d'un long calcul qui s'est étendu sur toute l'année 2011, il a démontré (le résultat avait été pressenti, mais nullement prouvé) qu'il n'existait pas de sudoku à 16 données initiales ayant une solution unique.

Sur la page <http://mapleta.maths.uwa.edu.au/~gordon/sudoku>,

on trouvera d'autres sudokus corrects (qui n'ont qu'une solution) à 17 données.

						1	5
		8	3				
					2		
2	3				8		
				1			
8							
1	5		4				
		6			7	2	
9							

ordinateurs pour qu'ils trouvent des démonstrations ou pour qu'ils vérifient des démonstrations trouvées par les mathématiciens. Pour cette vérification, il faut avoir pris soin de formaliser les preuves, ce qui se fait... avec l'aide d'ordinateurs (voir *Du rêve à la réalité de preuves* dans cette rubrique, avril 2011). Cependant, la formalisation des preuves est très contraignante et n'est vue que comme une possibilité ultime que l'on n'utilise que rarement. La notion de preuve rigoureuse de Thom ne mentionne pas de formalisme symbolique et semble prête à accepter bien d'autres idées.

L'approche formelle est par ailleurs catastrophique dans l'enseignement où elle revient à apprendre aux élèves des recettes de calculs qu'ils ne comprendront pas toujours... ou presque jamais. Nicolas Bourbaki, pourtant considéré comme le prototype même du formaliste, a exprimé clairement que comprendre ne consiste pas à suivre ligne à ligne une démonstration formelle : « Tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement "comprise" tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à toute autre. »

Si l'on souhaite vraiment saisir ce que sont les mathématiques, il faut, comme Thom, concevoir la démonstration d'une façon tolérante. C'est particulièrement important dans

l'enseignement, et c'est pourquoi il est légitime de s'intéresser aux démonstrations entraînant l'adhésion de ceux à qui on les présente et n'entrant pas dans le cadre formaliste que nous venons de rappeler. Voici une liste de méthodes de démonstrations mathématiques hétérodoxes qu'il sera amusant de pratiquer, voire qu'il sera judicieux d'utiliser dans les classes pour susciter l'adhésion, ou même... l'intérêt des élèves.

Prouver en calculant

Selon la conception formaliste, une multiplication posée n'est pas une preuve. Si on devait justifier dans le système formel de l'arithmétique élémentaire que $17 \times 19 = 323$, la démonstration occuperait plusieurs dizaines de lignes et n'apporterait rien. La traduction dans le système formel de l'arithmétique d'une opération posée :

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 19 \\ \hline 153 \\ 17 \\ \hline 323 \end{array}$$

est si fastidieuse et inutile qu'on ne la fait jamais. La vérification opérée en contrôlant chaque chiffre est facile et apporte une certitude. Finalement, un calcul posé doit, au sens de Thom, être considéré comme une démonstration.

Les méthodes de contrôle de telles démonstrations sont tellement simples, ne

demandant qu'un peu de soin et de patience (ou une machine), qu'un mathématicien dans un texte se contentera d'écrire $17 \times 19 = 323$, laissant aux lecteurs courageux l'exercice de calcul. Il écrira même sans donner de détail que 323 n'est pas un nombre premier (au lecteur de découvrir $17 \times 19 = 323$), ou qu'il y a 25 nombres premiers inférieurs à 100 et 168 inférieurs à 1 000.

Les outils de calcul ayant progressé, cette pratique s'est généralisée. Dans un texte mathématique d'aujourd'hui, on écrira donc « la séquence 123 apparaît pour la première fois au 1924^e chiffre décimal de π » (c'est vrai !) sans rien expliquer de plus. L'idée est que la vérification d'un tel résultat, pourtant impossible à mener à la main, est évidente, car celui qui le souhaite entreprendra un petit travail de programmation dont l'issue le persuadera sans l'ombre d'un doute de la justesse de l'énoncé. Les preuves par le calcul pur vous conduisent, comme Thom l'a écrit, dans un « état d'évidence qui entraîne l'adhésion », et cela même si le processus est long, fastidieux et s'appuie sur une multitude d'aides, dont celle d'une machine compliquée, produit d'une évolution technologique de plusieurs décennies ayant nécessité des investissements se comptant en milliards d'euros.

Déjà évoquées plusieurs fois dans cette rubrique, les « preuves sans mots » sont seulement constituées de dessins agrémentés de quelques symboles. L'idée est

3. Des preuves sans mots

Un examen attentif de la figure suffit à se convaincre du théorème (une propriété géométrique ou algébrique) à démontrer :
A. Le théorème de Viviani : la somme des distances d'un point à l'intérieur d'un triangle équilatéral aux trois côtés du triangle est constante et égale à la hauteur de ce triangle.
B. La somme des carrés des n premiers entiers est égale à $n(n+1)(2n+1)/6$ (on sait que la somme des n premiers entiers est $n(n+1)/2$).

