

ordinateurs pour qu'ils trouvent des démonstrations ou pour qu'ils vérifient des démonstrations trouvées par les mathématiciens. Pour cette vérification, il faut avoir pris soin de formaliser les preuves, ce qui se fait... avec l'aide d'ordinateurs (voir *Du rêve à la réalité de preuves* dans cette rubrique, avril 2011). Cependant, la formalisation des preuves est très contraignante et n'est vue que comme une possibilité ultime que l'on n'utilise que rarement. La notion de preuve rigoureuse de Thom ne mentionne pas de formalisme symbolique et semble prête à accepter bien d'autres idées.

L'approche formelle est par ailleurs catastrophique dans l'enseignement où elle revient à apprendre aux élèves des recettes de calculs qu'ils ne comprendront pas toujours... ou presque jamais. Nicolas Bourbaki, pourtant considéré comme le prototype même du formaliste, a exprimé clairement que comprendre ne consiste pas à suivre ligne à ligne une démonstration formelle : « Tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement "comprise" tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à toute autre. »

Si l'on souhaite vraiment saisir ce que sont les mathématiques, il faut, comme Thom, concevoir la démonstration d'une façon tolérante. C'est particulièrement important dans

l'enseignement, et c'est pourquoi il est légitime de s'intéresser aux démonstrations entraînant l'adhésion de ceux à qui on les présente et n'entrant pas dans le cadre formaliste que nous venons de rappeler. Voici une liste de méthodes de démonstrations mathématiques hétérodoxes qu'il sera amusant de pratiquer, voire qu'il sera judicieux d'utiliser dans les classes pour susciter l'adhésion, ou même... l'intérêt des élèves.

Prouver en calculant

Selon la conception formaliste, une multiplication posée n'est pas une preuve. Si on devait justifier dans le système formel de l'arithmétique élémentaire que $17 \times 19 = 323$, la démonstration occuperait plusieurs dizaines de lignes et n'apporterait rien. La traduction dans le système formel de l'arithmétique d'une opération posée :

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 19 \\ \hline 153 \\ 170 \\ \hline 323 \end{array}$$

est si fastidieuse et inutile qu'on ne la fait jamais. La vérification opérée en contrôlant chaque chiffre est facile et apporte une certitude. Finalement, un calcul posé doit, au sens de Thom, être considéré comme une démonstration.

Les méthodes de contrôle de telles démonstrations sont tellement simples, ne

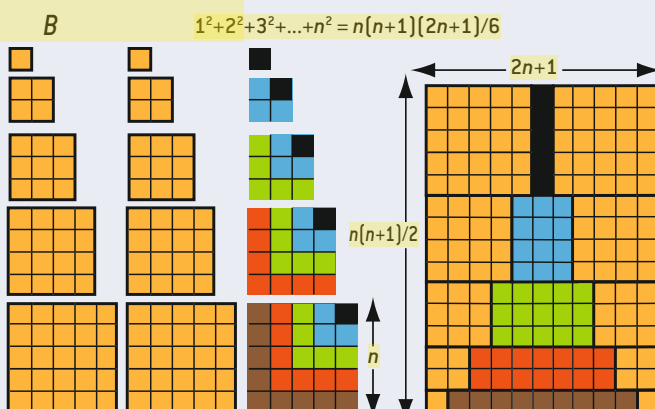
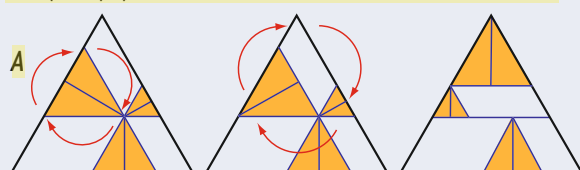
demandant qu'un peu de soin et de patience (ou une machine), qu'un mathématicien dans un texte se contentera d'écrire $17 \times 19 = 323$, laissant aux lecteurs courageux l'exercice de calcul. Il écrira même sans donner de détail que 323 n'est pas un nombre premier (au lecteur de découvrir $17 \times 19 = 323$), ou qu'il y a 25 nombres premiers inférieurs à 100 et 168 inférieurs à 1 000.

Les outils de calcul ayant progressé, cette pratique s'est généralisée. Dans un texte mathématique d'aujourd'hui, on écrira donc « la séquence 123 apparaît pour la première fois au 1924^e chiffre décimal de π » (c'est vrai !) sans rien expliquer de plus. L'idée est que la vérification d'un tel résultat, pourtant impossible à mener à la main, est évidente, car celui qui le souhaite entreprendra un petit travail de programmation dont l'issue le persuadera sans l'ombre d'un doute de la justesse de l'énoncé. Les preuves par le calcul pur vous conduisent, comme Thom l'a écrit, dans un « état d'évidence qui entraîne l'adhésion », et cela même si le processus est long, fastidieux et s'appuie sur une multitude d'aides, dont celle d'une machine compliquée, produit d'une évolution technologique de plusieurs décennies ayant nécessité des investissements se comptant en milliards d'euros.

Déjà évoquées plusieurs fois dans cette rubrique, les « preuves sans mots » sont seulement constituées de dessins agrémentés de quelques symboles. L'idée est

3. Des preuves sans mots

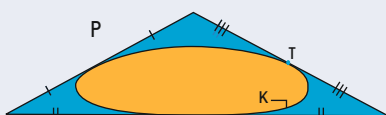
Un examen attentif de la figure suffit à se convaincre du théorème (une propriété géométrique ou algébrique) à démontrer :
A. Le théorème de Viviani : la somme des distances d'un point à l'intérieur d'un triangle équilatéral aux trois côtés du triangle est constante et égale à la hauteur de ce triangle.
B. La somme des carrés des n premiers entiers est égale à $n(n+1)(2n+1)/6$ (on sait que la somme des n premiers entiers est $n(n+1)/2$).



4. Par la physique !

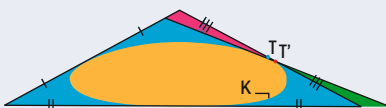
L'exemple suivant est tiré du livre de Mark Levi, *The Mathematical Mechanic*, Princeton University Press, 2009.

Théorème : Soit P un polygone d'aire minimale ayant n côtés et circonscrit à une forme convexe F délimitée par une courbe fermée K . Pour chaque côté C de P , le point de tangence T de K avec C est situé au milieu de C .



Démonstration physique : On imagine un cylindre ayant pour section K et on l'entoure de planches qui peuvent bouger indépendamment les unes des autres (on imagine qu'elles s'interpénètrent sans résistance). On fait le vide entre les planches et le cylindre. Les planches tentent de minimiser le volume de vide. Quand elles s'immobilisent, la surface en bleu est minimale. À cet instant, puisque le système est en équilibre, les points de tangence coupent chaque côté au milieu, car les couples de force dus à la pression constante s'égalent sur le point de contact. À deux dimensions, les forces uniformément réparties doivent s'équilibrer de part et d'autre du point de contact, qui est au milieu.

Esquisse d'une preuve avec des infinitésimaux, d'après Philippe Boulanger : Ce raisonnement utilise le fait qu'une fonction ne varie pas au voisinage d'un extremum suffisamment « plat » (la dérivée première de la fonction est continue). L'aire comprise entre le triangle et la coupe K du cylindre est minimale. Faisons varier un tout petit peu un côté de manière qu'il reste tangent en T' à la courbe K . Les petits triangles rouge et vert ainsi formés par les deux côtés ont la même aire, car l'aire bleue est minimale (l'aire gagnée est égale à l'aire perdue). Les deux triangles qui ont le même angle au sommet ont ainsi nécessairement des côtés de même longueur de part et d'autre de cet angle, et donc le point de contact est bien au milieu.

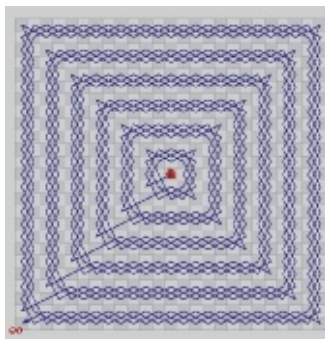


que l'observation attentive de l'image conduit le « lecteur suffisamment instruit et préparé » dans « un état d'évidence » concernant l'énoncé visé. De telles démonstrations (voir l'encadré 3) sont, pour le mathématicien qui suit Thom, des preuves parfaitement acceptables auxquelles rien ne manque.

Démontrer sans mots

Notons que les preuves sans mots, comme les preuves par le calcul pur, sont transformables en preuves formelles, mais le travail sera moins mécanique que pour le calcul pur. Le plus souvent, une telle traduction n'apportera pas grand-chose, et, au contraire, diminuera « l'état d'évidence » que crée la preuve sans mots. Pour le mathématicien à l'esprit ouvert, une belle preuve sans mots est donc une bien meilleure preuve qu'une preuve formelle.

Notons que les preuves sans mots démontrent parfaitement des résultats concernant l'infini. C'est le cas de la preuve qu'un cavalier du jeu d'échecs peut parcourir toutes les cases d'un échiquier infini (ci-dessous).



Les preuves de topologie posent cependant un grave problème : en géométrie, Emmanuel Kant avait tort quand il estimait que les mathématiques sont fondées sur l'évidence intuitive des choses. Le théorème de Jordan illustrera ce point : il énonce que « Toute courbe simple fermée C (ne se recoupant pas et revenant à son point de départ) délimite dans le plan deux zones, telles qu'une courbe, qui relie un point de la première zone à un point de la seconde, coupe nécessairement C ».

Suffit-il de faire un petit dessin pour démontrer le théorème de Jordan ? L'ad-

mettre est difficile, car aucune des preuves fondées sur les propriétés des nombres réels (indispensables pour définir convenablement ce que sont un plan et une courbe) n'est simple. On considère d'ailleurs qu'une preuve satisfaisante de ce théorème intuitivement évident n'a vraiment été formulée qu'en 1887 et qu'il a fallu encore un peu l'arranger en 1924 pour qu'on la juge complète. L'écriture totalement formelle d'une preuve du théorème de Jordan (dans un système permettant de parler de nombres réels) est considérée comme un exploit informatique et n'a été obtenue qu'en 2007 par Thomas Hales en utilisant le système logiciel HOL !

La raison de cette distorsion entre le petit dessin et la preuve détaillée jugée seule vraiment convenable est que le formaliste, qui a sans doute raison cette fois, ne peut pas se contenter de dire qu'une courbe est un tracé qu'on dessine sans lever le crayon. Après avoir donné la définition précise d'une courbe utilisant la notion de fonction continue, il doit s'y référer... ce qui n'est pas facile. Lorsqu'il s'agira de topologie ou de continuité, même si les preuves sans mots par petits dessins sont possibles et assez persuasives, il sera utile pour aller plus loin (et obtenir des généralisations à des espaces à plus de deux dimensions) de s'intéresser aussi aux preuves ramenant la géométrie à l'analyse, et cela quel qu'en soit le coût.

Se convaincre par l'observation d'un film

Assez proches des preuves sans mots, il y a les preuves par l'observation d'un film d'animation. En regardant des figures animées soigneusement conçues, on se trouve persuadé d'une vérité mathématique (par exemple le théorème de Pythagore). Utilisant systématiquement ce type de preuves, une série de films remarquables créés par Tom Apostol et adaptés à la langue française par Éliane Cousquer est accessible gratuitement en : <http://itunes.apple.com/itunes-u/mathematics-/id420345770>

Toujours dans la même lignée, de petits programmes s'exécutent sur votre ordina-