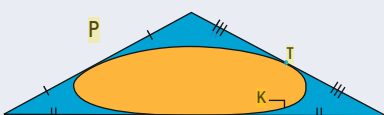


4. Par la physique !

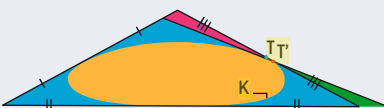
L'exemple suivant est tiré du livre de Mark Levi, *The Mathematical Mechanic*, Princeton University Press, 2009.

Théorème : Soit P un polygone d'aire minimale ayant n côtés et circonscrit à une forme convexe F délimitée par une courbe fermée K . Pour chaque côté C de P , le point de tangence T de K avec C est situé au milieu de C .



Démonstration physique : On imagine un cylindre ayant pour section K et on l'entoure de planches qui peuvent bouger indépendamment les unes des autres (on imagine qu'elles s'interpénètrent sans résistance). On fait le vide entre les planches et le cylindre. Les planches tentent de minimiser le volume de vide. Quand elles s'immobilisent, la surface en bleu est minimale. À cet instant, puisque le système est en équilibre, les points de tangence coupent chaque côté au milieu, car les couples de force dus à la pression constante s'égalent sur le point de contact. À deux dimensions, les forces uniformément réparties doivent s'équilibrer de part et d'autre du point de contact, qui est au milieu.

Esquisse d'une preuve avec des infinitésimaux, d'après Philippe Boulanger : Ce raisonnement utilise le fait qu'une fonction ne varie pas au voisinage d'un extremum suffisamment « plat » (la dérivée première de la fonction est continue). L'aire comprise entre le triangle et la coupe K du cylindre est minimale. Faisons varier un tout petit peu un côté de manière qu'il reste tangent en T' à la courbe K . Les petits triangles rouge et vert ainsi formés par les deux côtés ont la même aire, car l'aire bleue est minimale (l'aire gagnée est égale à l'aire perdue). Les deux triangles qui ont le même angle au sommet ont ainsi nécessairement des côtés de même longueur de part et d'autre de cet angle, et donc le point de contact est bien au milieu.

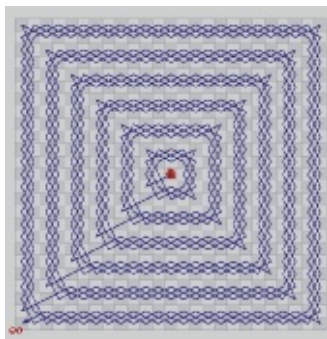


que l'observation attentive de l'image conduit le « lecteur suffisamment instruit et préparé » dans « un état d'évidence » concernant l'énoncé visé. De telles démonstrations (voir l'encadré 3) sont, pour le mathématicien qui suit Thom, des preuves parfaitement acceptables auxquelles rien ne manque.

Démontrer sans mots

Notons que les preuves sans mots, comme les preuves par le calcul pur, sont transformables en preuves formelles, mais le travail sera moins mécanique que pour le calcul pur. Le plus souvent, une telle traduction n'apportera pas grand-chose, et, au contraire, diminuera « l'état d'évidence » que crée la preuve sans mots. Pour le mathématicien à l'esprit ouvert, une belle preuve sans mots est donc une bien meilleure preuve qu'une preuve formelle.

Notons que les preuves sans mots démontrent parfaitement des résultats concernant l'infini. C'est le cas de la preuve qu'un cavalier du jeu d'échecs peut parcourir toutes les cases d'un échiquier infini (*ci-dessous*).



Les preuves de topologie posent cependant un grave problème : en géométrie, Emmanuel Kant avait tort quand il estimait que les mathématiques sont fondées sur l'évidence intuitive des choses. Le théorème de Jordan illustrera ce point : il énonce que « Toute courbe simple fermée C (ne se recoupant pas et revenant à son point de départ) délimite dans le plan deux zones, telles qu'une courbe, qui relie un point de la première zone à un point de la seconde, coupe nécessairement C ».

Suffit-il de faire un petit dessin pour démontrer le théorème de Jordan ? L'ad-

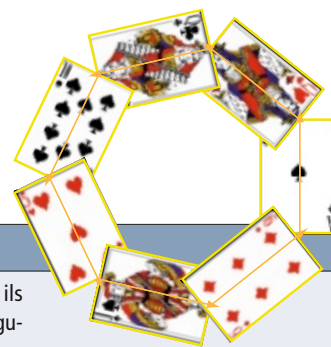
mettre est difficile, car aucune des preuves fondées sur les propriétés des nombres réels (indispensables pour définir convenablement ce que sont un plan et une courbe) n'est simple. On considère d'ailleurs qu'une preuve satisfaisante de ce théorème intuitivement évident n'a vraiment été formulée qu'en 1887 et qu'il a fallu encore un peu l'arranger en 1924 pour qu'on la juge complète. L'écriture totalement formelle d'une preuve du théorème de Jordan (dans un système permettant de parler de nombres réels) est considérée comme un exploit informatique et n'a été obtenue qu'en 2007 par Thomas Hales en utilisant le système logiciel HOL !

La raison de cette distorsion entre le petit dessin et la preuve détaillée jugée seule vraiment convenable est que le formaliste, qui a sans doute raison cette fois, ne peut pas se contenter de dire qu'une courbe est un tracé qu'on dessine sans lever le crayon. Après avoir donné la définition précise d'une courbe utilisant la notion de fonction continue, il doit s'y référer... ce qui n'est pas facile. Lorsqu'il s'agira de topologie ou de continuité, même si les preuves sans mots par petits dessins sont possibles et assez persuasives, il sera utile pour aller plus loin (et obtenir des généralisations à des espaces à plus de deux dimensions) de s'intéresser aussi aux preuves ramenant la géométrie à l'analyse, et cela quel qu'en soit le coût.

Se convaincre par l'observation d'un film

Assez proches des preuves sans mots, il y a les preuves par l'observation d'un film d'animation. En regardant des figures animées soigneusement conçues, on se trouve persuadé d'une vérité mathématique (par exemple le théorème de Pythagore). Utilisant systématiquement ce type de preuves, une série de films remarquables créés par Tom Apostol et adaptés à la langue française par Éliane Cousquer est accessible gratuitement en : <http://itunes.apple.com/itunes-u/mathematics-/id420345720>

Toujours dans la même lignée, de petits programmes s'exécutent sur votre ordina-



5. Une preuve mentale du théorème de Wilson

Théorème de Wilson : si p est premier, alors $(p-1)! + 1$ est divisible par p . Ce résultat était connu du mathématicien arabe Alhasen (965-1039) ; il doit son nom

On imagine un jeu de 52 cartes et on associe une direction à chaque couleur : Nord pour pique, Ouest pour trèfle, Est pour carreau, Sud pour cœur. On mélange les cartes et on en déduit une promenade aléatoire en prenant les cartes une à une et en les mettant à la suite l'une de l'autre. Comme il y a autant de Nord que de Sud et autant d'Ouest que d'Est, le parcours ramène au point de départ.

Prenons maintenant un jeu de p cartes, p étant un nombre premier. Soit l'angle $360^\circ/p$ (un p -ième d'un tour complet) qu'on dénommera angle de base. On numérote les cartes par les entiers de 0 à $p-1$. À la carte i , on associe i fois l'angle de base. Comme précédemment, quel que soit l'ordre des cartes, le parcours aléatoire qu'on en déduit ramène au point de départ. Pour le voir, on considère les p vecteurs unitaires associés à

ces p angles pris dans l'ordre : ils dessinent un grand polygone régulier à p côtés et donc leur somme est nulle. Dans un autre ordre, elle reste bien sûr nulle.

On réfléchit maintenant aux $p!$ promenades aléatoires engendrées par les différentes façons de classer les cartes. Comme le point de départ est sans importance, il n'y a que $(p-1)!$ promenades aléatoires différentes.

Certaines promenades sont peut-être invariantes par rotation, mais puisque p est premier, cela ne peut être que par la rotation de l'angle de base. Les promenades invariantes par rotation de l'angle de base sont faciles à identifier : ce sont celles qui dessinent les étoiles régulières faites en prenant p points régulièrement espacés sur une circonférence. Il y en a exactement $p-1$ (il y a deux fois moins d'étoiles, mais chacune donne deux promenades selon

la façon dont on la parcourt). Il y a donc en tout $(p-1)! - (p-1)$ promenades différentes asymétriques.

Toute rotation d'une promenade asymétrique par un multiple de l'angle de base en donne une autre. Les promenades asymétriques se regroupent donc en paquets de p (dans un paquet, toutes les promenades s'obtiennent en faisant tourner l'une d'elles par les multiples de l'angle de base). Le nombre $(p-1)! - (p-1)$ est donc divisible par p , donc $(p-1)! + 1$ aussi. CQFD.

La réciproque conduit à une caractérisation des nombres premiers. Elle se fait mentalement aussi : si $p > 4$ est composé, alors $(p-1)!$ est divisible par p (traiter le cas p carré parfait, puis p non carré), donc $(p-1)! + 1$ ne l'est pas. Pour $p = 4$, on a $(p-1)! + 1 = 7$, non divisible par 4.

à John Wilson (1741-1793) qui l'énonça en 1770 sans le démontrer, chose faite trois ans plus tard par Joseph-Louis Lagrange.

teur et vous proposent des démonstrations animées parfaitement convaincantes (*voir* <http://clem.mscedu/~talman/MathAnim.html> pour une collection de telles animations).

Des preuves mentales

À l'opposé des preuves sans mots, il y a les preuves sans dessins ni symbolisme mathématique, qu'on pourrait qualifier de mentales. Lors d'une promenade à pied avec un ami, vous la raconterez... et cela même en pleine nuit. Pour peu qu'il soit assez attentif, en vous écoutant, votre ami comprendra et se trouvera donc à la fin de votre exposé convaincu d'un résultat mathématique nouveau. Récemment, le mathématicien britannique Adam Goucher a proposé une preuve mentale et géométrique [ce n'est pas incompatible !] du théorème de Wilson. Ce théorème donne une caractérisation des nombres premiers comme nombres p qui divisent $(p-1)! + 1$ (*voir la figure 5*). Je vous recommande cette

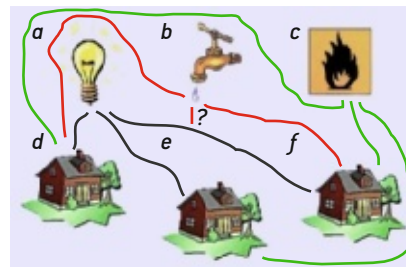
preuve pour votre prochaine excursion en montagne. Elle vous fera sentir, bien mieux que les preuves usuelles fondées sur des connaissances peu intuitives d'arithmétique modulaire, que le théorème est vrai : en un mot, elle vous fera accéder à cet état de conviction profonde qui constitue la compréhension mathématique véritable. Du fait de leur nature verbale, les preuves mentales sont en général faciles à traduire en preuves formelles.

Prouver en bougeant son corps

Les mouvements et les actions qu'on effectue soi-même sont un bon moyen de se persuader d'une vérité. Cette implication du corps dans le processus de démonstration est parfois le moyen le plus efficace d'arriver à l'état de certitude intime à propos d'un énoncé mathématique.

L'exemple du problème des trois maisons de Henry Dudeney qui doivent avoir l'eau, le

gaz et l'électricité illustre cette situation (*voir ci-dessous*). Il lui correspond le théorème affirmant que le graphe $K_{3,3}$ (où trois points a , b et c rejoignent chacun trois autres points d , e et f) n'est pas planaire, c'est-à-dire ne peut pas être dessiné sur un plan sans que les tracés des jonctions ne se coupent. Qui-conque essaye pendant dix minutes de résoudre le problème de Dudeney avec un papier, un crayon et une gomme, atteint cet état de certitude absolue que $K_{3,3}$ n'est pas planaire.



Le problème des trois maisons de Henry Dudeney : les tracés reliant $\{a, b, c\}$ à $\{d, e, f\}$ se coupent forcément au moins une fois.